Université de Bordeaux — **Algèbre 3 – Licence 2**
Mathématiques — Année 2015–2016

FEUILLE D'EXERCICES n° 1

Révisions d'arithmétique

Exercice 1 – On note $M_n = 2^n - 1$ pour tout entier naturel n.

1) Montrer que M_n premier $\Rightarrow n$ premier.
2) Vérifier que M_2, M_3, M_5, M_7 sont premiers mais que M_{11} ne l'est pas.

Exercice 2 – On note $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_i sont des entiers strictement positifs. Combien n a-t-il de diviseurs?

Exercice 3 – Calculer à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu le pgcd, le ppcm et une relation de Bézout pour les nombres 720 et 252.

Exercice 4 –

1) Calculer $\mathrm{pgcd}(18, 385)$ et une relation de Bézout $18u_0 + 385v_0 = 1$ avec $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$.
2) Déterminer toutes les solutions $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ des équations suivantes:

$$18u + 385v = 1 \qquad 18u + 385v = 3 \qquad 54u + 1155v = 3 \qquad 54u + 1155v = 5$$

Exercice 5 – Soit $u_n = 5^n + 6^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathrm{pgcd}(u_n, u_{n+1})$.

Exercice 6 –

1) En divisant un nombre par 8, un élève a obtenu 4 comme reste. En divisant ce même nombre par 12, il a trouvé 3 comme reste. Qu'en pensez-vous ?
2) Un autre élève a calculé (sans erreur) que le reste du millésime de l'année dans la division par 29 est 25 et dans la division par 69 est 7. En quelle année cela se passait-il ?

Exercice 7 – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(8n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 8 – Soit a, m, n des entiers strictement positifs avec $a \geq 2$. On se propose de montrer que

$$\mathrm{pgcd}(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\mathrm{pgcd}(m,n)} - 1.$$

1) Soit $x \geq 2$ un entier. Montrer que, pour tout $q \geq 0$, $x^q \equiv 1 \bmod (x - 1)$.
2) Soit r le reste de la division euclidienne de n par m. Déduire de la question précédente que $a^n \equiv a^r \bmod (a^m - 1)$.
3) En déduire que $\mathrm{pgcd}(a^n - 1, a^m - 1) = \mathrm{pgcd}(a^m - 1, a^r - 1)$.
4) Conclure.

Exercice 9 –

1) À quoi reconnaît-on qu'un entier écrit en base 10 est divisible par 2? par 5? par 3? par 9? Utilisez les congruences pour justifier ces critères.
2) Montrez qu'un entier dont l'écriture en base 10 est $a_{m-1} \ldots a_1 a_0$ est divisible par 11 si et seulement si $a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{m-1} a_{m-1} \equiv 0 \bmod 11$.
3) Établir un critère de divisibilité par 101 puis montrer, sans calculatrice et sans poser de division que 478775514327 est divisible par 101.
4) Donner un critère de divisibilité par 7 portant sur l'écriture binaire d'un entier et l'appliquer à l'entier dont l'écriture binaire est 101101010110111.