SVE 201 — Algèbre linéaire

Systèmes linéaires 2x2

$\boxed{1}$ Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$S_1 = \begin{cases} -a & = 4 \\ 4a - b & = 1 \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} u - 2v & = -6 \\ -6u + 18v & = 35 \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} u - 2v & = -6 \\ -6u + 12v & = 35 \end{cases}$$

$$S_4 = \begin{cases} x - y & = 5 \\ 6x - 7y & = 31 \end{cases}$$

$$S_5 = \begin{cases} -x + y & = 1 \\ -4x + 3y & = 9 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Résoudre les systèmes linéaires suivant. On discutera l'ensemble des solutions suivant les valeurs du paramètre m ou t.

$$S_1 = \begin{cases} 12x + (3m+9)y & = 5 \\ -12x + (6m-27)y & = -5 \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} x + my & = m \\ 3(m-1)x + 6y & = m^2 + 2m - 2 \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} 3x + t^2 y & = 3(t-1) \\ (t+2)x + ty & = 2(t-1) \end{cases}$$

Systèmes linéaires 3x3

$\boxed{3}$ Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 2x+y+2z &= 2 \\ x-4y+7z &= 3 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x-y &= 0 \\ y-z &= 1 \\ z-x &= 0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x-z &= 1 \\ z-y &= 0 \\ x+y-2z &= 1 \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} 2x+3y-5z &= -16 \\ 4x+13y-8z &= -5 \\ x+2y+7z &= 22 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} 2x+y-z &= 6 \\ 3x-2y+z &= 3 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} x-2y &= -3 \\ 4x+3y &= -1 \\ 3x+y &= -2 \end{cases}$$

$$(S_7)\begin{cases} 5x+2z &= 1 \\ y-3z &= 2 \\ 2x+y &= 3 \end{cases} \qquad (S_8)\begin{cases} x+3y+5z &= 7 \\ 2x+4y+8z &= 16 \\ 3x+4y+5z &= 6 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Résoudre le système linéaire suivant. On discutera l'ensemble des solutions suivant la valeur du paramètre m.

$$\begin{cases} 2x+6y-4z &= m \\ x+3y-2z &= 4 \\ 2x+y-3z &= -7 \end{cases}$$

$\boxed{5}$ Résoudre le système linéaire suivant. On discutera l'ensemble des solutions suivant la valeur du paramètre t.

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ 4x+y &= 11 \\ 2x+y &= m \end{cases}$$

Matrices

$\boxed{6}$ Soit A et B les matrices suivantes. Montrez que $AB = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 34 & 12 \\ 1 & -17 & -6 \\ -1 & 17 & 6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{7}$ Soit A et B les matrices suivantes. Montrez que $AB = I$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{8}$ Calculez B^3, avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{9}$ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. Montrez que $A^2 - 5A + 4I = 0$.

$\boxed{10}$ Écrire sous forme d'un produit de matrices les systèmes linéaires suivants :

1.
$$\begin{cases} 2x - 3y & = 9 \\ -10x + 15y & = -45 \end{cases}$$

   Quel est le déterminant de ce système ? Quel est l'ensemble des solutions ?

2.
$$\begin{cases} x - 2y & = -3 \\ 4x + 3y & = -1 \\ 3x + y & = -2 \end{cases}$$

$\boxed{11}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $A^2 - 11A - 2I$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. Écrire le système

$$S = \begin{cases} 4x - 5y & = 1/2 \\ -6x + 7y & = 5/6 \end{cases}$$

   sous forme matricielle et déduire de la question 1. la solution de S.

$\boxed{12}$ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifiez que $A^2 - 5A + 4I = 0$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. Écrire le système

$$S = \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ -5x + 6y = -1 \end{cases}$$

   sous forme matricielle et déduire de la question 1. la solution de S.

$\boxed{13}$ Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que $A(A - I) - 2I = 0$.
2. En déduire que A est inversible et calculez A^{-1}.

$\boxed{14}$ Soit S le système suivant :

$$\begin{cases} mx + y & = 1 \\ 4x + my & = -2 \end{cases}$$

1. Écrire ce système sous forme matricielle.
2. Déterminez pour quelles valeur de m la matrice A_m de ce système est inversible.
3. Pour les valeurs de m telles que A_m est inversible, inverser A_m et en déduire l'unique solution de S.
4. Discuter les solutions de S dans les autres cas.

$\boxed{15}$

1. Calculez les produits AB et BA lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire la matrice inverse de A.
3. Écrire le système suivant sous forme matriciel :

$$\begin{cases} 2x + y + z & = 7 \\ x + 2y + z & = 8 \\ x + y + 2z & = 9 \end{cases}$$

4. Utilisez la matrice inverse de A pour résoudre le système ci-dessus.
5. Retrouvez le résultat par la méthode du pivot de Gauss.

Extrait du DS 2007

$\boxed{16}$ Résoudre le système linéaire suivant par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z & = 0 \\ 3x + y + 3z & = 1 \\ 3x + 3y + z & = 2 \end{cases}$$

$\boxed{17}$ Résoudre le système linéaire suivant, par une méthode de votre choix. On discutera l'ensemble des solutions suivant la valeur du paramétre m.

$$\begin{cases} x + my & = 1 \\ mx + y & = m^2 \end{cases}$$

$\boxed{18}$ Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que $(A - I)^2(A + I) = 0$.
2. En déduire que $A^3 - A^2 - A + I = 0$.
3. Montrez que A est inversible et que $A^{-1} = -A^2 + A + I$.
4. Calculez A^{-1}.