Réformé en 2006

Agrégation externe de mathématiques, session 2005
Épreuve de modélisation, option calcul scientifique : méthodes numériques et symboliques

---

(561) CONSTRUCTION DE CARRÉS MAGIQUES

Résumé : On étudie ici des algorithmes de construction de carrés magiques particuliers.

Thème applicatif, mots clefs : carrés magiques, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, permutations.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Introduction

Les carrés magiques ont fait très tôt l'objet d'études mathématiques. On en recense en Chine dès les premiers siècles pour n petit; des méthodes de construction voient le jour en Perse au IX$^{\text{e}}$ siècle pour $n = 8$. De grands mathématiciens se sont intéressés de très près aux carrés magiques : Pierre de Fermat, Léonhard Euler, Karl Friedrich Gauss... Blaise Pascal a même écrit un traité intitulé : *Traité des nombres magiquement magiques.*

Parmi la grande variété de carrés magiques existante, nous nous intéressons ici exclusivement à une catégorie bien spécifique : les carrés eulériens pandiagonaux.

2. Notations

Dans toute l'étude qui suit, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle *carré de taille n* un tableau à n lignes et n colonnes à coefficients entiers naturels. A un tel carré peut être associée une matrice A carrée d'ordre n. Contrairement aux usages, les n lignes et les n colonnes d'un tel carré (et donc de sa matrice A associée) sont numérotées de 0 à $n-1$: $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$. Pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 0 et $n-1$, l'entier naturel $a_{i,j}$ désigne donc la valeur de la *case d'indice* (i, j) du carré.

Cette nouvelle numérotation des lignes et des colonnes permet de travailler commodément modulo n, (le carré modélise en fait un tore) : la ligne (ou la colonne) qui suit celle de numéro $n-1$ est celle de numéro 0 et la ligne (ou la colonne) qui précède celle de numéro 0 est celle de numéro $n-1$.

Un carré de taille n (et, par conséquent, une matrice carrée d'ordre n) présente $4n$ *rangées* : n lignes, n colonnes et $2n$ « diagonales », dont deux « vraies » diagonales et $2n-2$ « diagonales brisées » (la figure 1 suffit à comprendre cette notion).

Définition 1. *On appelle* carré eulérien pandiagonal de taille n *tout carré de taille n vérifiant les deux conditions suivantes :*

(P1): *le carré est* eulérien, *c'est-à-dire que chacun des entiers compris entre* 0 *et* n^2-1 *apparaît (une et une seule fois évidemment) dans les* n^2 *cases du carré ;*

(P2): *le carré est* pandiagonal, *c'est-à-dire que la somme des éléments situés sur chacune des* $4n$ *rangées du tableau est identique.*

En fait, pour construire des carrés eulériens pandiagonaux, il est souvent plus agréable d'écrire les coefficients du carré en base n plutôt qu'en base 10.

Tout entier compris entre 0 et n^2-1 s'écrit de manière unique en base n sous la forme $n\alpha+\beta$, où α et β sont deux entiers compris entre 0 et $n-1$. Comme c'est l'usage, l'entier $n\alpha+\beta$ est alors simplement noté $\overline{\alpha\beta}$.

0	24	18	12	6
13	7	1	20	19
21	15	14	8	2
9	3	22	16	10
17	11	5	4	23

en base 10

$\overline{00}$	$\overline{44}$	$\overline{33}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$
$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{01}$	$\overline{40}$	$\overline{34}$
$\overline{41}$	$\overline{30}$	$\overline{24}$	$\overline{13}$	$\overline{02}$
$\overline{14}$	$\overline{03}$	$\overline{42}$	$\overline{31}$	$\overline{20}$
$\overline{32}$	$\overline{21}$	$\overline{10}$	$\overline{04}$	$\overline{43}$

en base 5

FIG. 1. Exemple de carré magique pandiagonal de taille 5

Le carré de taille 5 de la figure 1 (en base 10) est eulérien. De plus, la somme des termes de chaque ligne et de chaque colonne est égale à 60, mais c'est également vrai pour la somme des termes des deux diagonales ordinaires et des huit diagonales brisées :

$$\begin{array}{l|l}
0+7+14+16+23=60 & 17+3+14+20+6=60 \\
13+15+22+4+6=60 & 9+15+1+12+23=60 \\
21+3+5+12+19=60 & 21+7+18+4+10=60 \\
9+11+18+20+2=60 & 13+24+5+16+2=60 \\
17+24+1+8+10=60 & 0+11+22+8+19=60
\end{array}$$

Il s'agit donc bien d'un carré eulérien pandiagonal de taille 5.

L'objet de l'étude consiste à étudier des algorithmes de construction de carrés eulériens pandiagonaux.

3. Algorithme du cavalier

L'algorithme suivant permet de construire des carrés eulériens pandiagonaux pour certaines valeurs de n, à savoir : n doit être un nombre impair non multiple de 3. (On l'appelle *algorithme du cavalier* car il est fondé sur le déplacement de cette pièce au jeu d'échecs). Le principe consiste à placer dans un carré de taille n initialement vide chacun des entiers compris entre 0 et n^2-1 de la manière suivante :

– placer 0 en case d'indice $(0,0)$.
– jusqu'à ce que le carré soit complètement rempli, en supposant que l'on vient de placer l'entier k dans la case d'indice (i,j), alors placer l'entier $k+1$:
  – dans la case d'indice $(i+1,j+2)$, si cette case n'est pas déjà remplie ;
  – dans la case d'indice $(i,j-1)$, sinon.

On convient dans cette description que les opérations sur les numéros de ligne ou de colonne sont faites modulo n, comme décrit au § 2.

On remarque que l'exemple de la figure 1 est construit d'après cet algorithme.

4. Généralisation de l'algorithme

L'algorithme du cavalier permet d'obtenir un carré eulérien pandiagonal bien spécifique (ou quelques uns, en tenant compte des variantes possibles), mais il en existe de nombreux autres que l'on ne peut pas obtenir par ce moyen. Nous souhaitons désormais élargir la méthode pour être capable de construire de plus vastes familles de carrés eulériens pandiagonaux.

L'idée repose sur le constat suivant. Si l'on reprend l'exemple de la figure 1 écrit en base 5, on se rend compte que l'on peut « décomposer » ce carré en deux carrés de taille 5 qui ne font intervenir que des nombres compris entre 0 et 4, comme le montre la figure 2.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \overline{00} & \overline{44} & \overline{33} & \overline{22} & \overline{11} \\\hline \overline{23} & \overline{12} & \overline{01} & \overline{40} & \overline{34} \\\hline \overline{41} & \overline{30} & \overline{24} & \overline{13} & \overline{02} \\\hline \overline{14} & \overline{03} & \overline{42} & \overline{31} & \overline{20} \\\hline \overline{32} & \overline{21} & \overline{10} & \overline{04} & \overline{43} \\\hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\\hline 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\\hline 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\\hline 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\\hline 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\\hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\\hline 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\\hline 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\\hline 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\\hline 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\\hline \end{array}$$

FIG. 2. « Décomposition » d'un carré eulérien pandiagonal de taille 5

Définition 2. *On appelle* carré latin pandiagonal de taille n *tout carré de taille n vérifiant la condition suivante :*

(P3): *le carré est* latin pandiagonal, *c'est-à-dire que chacun des entiers compris entre* 0 *et* $n-1$ *apparaît (une et une seule fois évidemment) dans chacune des* $4n$ *rangées du carré.*

Définition 3. *Considérons deux carrés latins pandiagonaux de taille n T_1 et T_2 de matrices associées $A=(a_{i,j})_{0\leq i,j\leq n-1}$ et $B=(b_{i,j})_{0\leq i,j\leq n-1}$. On appelle* produit cartésien $T_1 \times T_2$ *des deux carrés latins le carré de taille n dont la matrice associée est $C=(c_{i,j})_{0\leq i,j\leq n-1}$ où chaque terme $c_{i,j}$ est égal à l'entier $na_{i,j}+b_{i,j}$, donc noté $\overline{a_{i,j}b_{i,j}}$ en base n.*

On constate donc que l'exemple de la figure 2 correspond à la décomposition d'un carré eulérien pandiagonal en un produit cartésien de deux carrés latins pandiagonaux.

D'où l'idée d'un algorithme consistant à construire des carrés eulériens pandiagonaux par produit cartésien de carrés latins pandiagonaux. Pour cela, deux outils sont nécessaires :
– être capable de produire des carrés latins pandiagonaux ;

– être capable de sélectionner des couples de carrés latins pandiagonaux dont le produit cartésien fournisse un carré eulérien pandiagonal.

Ces deux questions sont étudiées dans les § 5 et 6 suivants.

5. Génération de carrés latins pandiagonaux

On donne ici une condition suffisante d'obtention de carrés latins pandiagonaux.

Cela nécessite quelques notions sur les générateurs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$: on appelle ici *générateur interne* de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tout générateur $\overline{k}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que $\overline{k-1}$ et $\overline{k+1}$ soient également des générateurs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Sur l'exemple de la figure 2, on constate que le premier carré latin pandiagonal est obtenu en « décalant à droite » la première ligne 0 4 3 2 1 de la valeur $\overline{2}$ (générateur interne de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$) à chaque nouvelle ligne. Ainsi, la seconde ligne est 2 1 0 4 3, puis la troisième 4 3 2 1 0, etc... Ce carré latin est donc entièrement défini par la permutation de l'ensemble $[\![0;4]\!]$ donné par la première ligne et par l'entier 2 correspondant au décalage effectué sur cette ligne.

Plus généralement, on établit le résultat suivant :

Proposition 1. *La donnée de toute permutation de l'ensemble* $[\![0;n-1]\!]$ *et de tout générateur interne de* $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ *définit un carré latin pandiagonal de taille n.*

Un carré latin pandiagonal de taille n auquel on peut ainsi associer une permutation σ de $[\![0;n-1]\!]$ et un générateur interne $\overline{p}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est appelé *carré latin pandiagonal de taille n et de type* $(\sigma,\overline{p})$.

Pour construire tous les carrés latins pandiagonaux de taille n, on est amené à énumérer toutes les permutations de l'ensemble $[\![0;n-1]\!]$. Une méthode pour cela consiste à engendrer toutes les permutations dans l'ordre lexicographique : la première permutation est $(0,1,\ldots,n-1)$ et la dernière est $(n-1,n-2,\ldots,0)$. Pour calculer la permutation suivante d'une permutation σ (autre que la dernière), on considère la dernière *montée* de σ, c'est-à-dire le plus grand entier $i<n-1$ tel que $\sigma(i)<\sigma(i+1)$.

6. Produit cartésien de carrés latins pandiagonaux

On donne ici une condition suffisante d'obtention de carrés eulériens pandiagonaux.

Le produit cartésien de deux carrés latins pandiagonaux quelconques ne fournit pas systématiquement un carré eulérien pandiagonal : par exemple, le produit cartésien de deux carrés latins pandiagonaux identiques ne satisfait pas à la condition **(P1)** de la définition 1.

Définition 4. *Deux carrés latins pandiagonaux de taille n de types respectifs* $(\sigma_1,\overline{p_1})$ *et* $(\sigma_2,\overline{p_2})$ *sont dits* de types indépendants *si* $\overline{p_1-p_2}$ *est un générateur de* $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Dans l'exemple 2, les deux carrés latins pandiagonaux considérés sont indépendants : les générateurs internes de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ qui leur sont associés sont respectivement $\overline{2}$ et $\overline{3}$.

On établit alors le résultat suivant :

Proposition 2. *Le produit cartésien de deux carrés latins pandiagonaux de taille n et de types indépendants est un carré eulérien pandiagonal de taille n (dont les coefficients sont écrits en base n).*

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

– On pourra écrire un programme qui teste si un tableau carré de taille n est un carré eulérien pandiagonal d'ordre n.
– On pourra étudier l'existence (ou pas) de carrés eulériens pandiagonaux de petite taille (2, 3, et 4 éventuellement).
– Concernant l'algorithme du cavalier, on pourra :
 – le programmer (on pourra proposer plusieurs programmations dont on comparera les efficacités respectives) ;
 – proposer une preuve que cet algorithme construit effectivement un carré eulérien pandiagonal sous les hypothèses faites sur l'entier n (pour cela, on pourra déterminer une expression générale des coefficients $a_{i,j}$ de la matrice A associée) ;
 – déterminer pourquoi l'algorithme n'est pas correct lorsque n est pair ou multiple de 3.
– On pourra proposer une preuve des propositions 1 et/ou 2.
– On pourra décrire et programmer l'algorithme proposé pour généraliser la méthode du cavalier, en détaillant particulièrement les points suivants :
 – description et programmation d'un algorithme d'énumération des permutations de $[\![0;n-1]\!]$;
 – description et programmation d'un algorithme d'obtention des générateurs internes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.