Université de Bordeaux | **Arithmétique – M1MA7W01**
Master 1 CSI | Année 2013–2014

FEUILLE D'EXERCICES n° 1

Exercice 1 –

1) Calculer l'inverse de 13 dans l'anneau $\mathbb{Z}/57\mathbb{Z}$.

2) On pose $P = X^5 + X - 1$ et $Q = X^3 - 1$. Calculer l'inverse de $\bar{Q}$ dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]/\langle P\rangle$.

3) On pose $P = X^5 + X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$. Calculer l'inverse de $\bar{Q}$ dans l'anneau $\mathbb{F}_2[X]/\langle P\rangle$.

Exercice 2 – Soit K un corps.

1) Soient P et Q dans $K[X]$. Montrer que : P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $P + Q$ et PQ sont premiers entre eux.

2) Trouver un couple $(P, Q) \in K[X]^2$ tel que $\mathrm{pgcd}(P, Q) \neq \mathrm{pgcd}(P + Q, PQ)$.

Exercice 3 –

1) Trouver tous les $x \in \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ vérifiant $\bar{7}x = \bar{2}$.

2) On pose $P = X^4 + 2X^2 + 1$. Trouver tous les $Q \in \mathbb{F}_7[X]/\langle P\rangle$ vérifiant $(X^2 - 1)Q = X^3 + 2X + 2$.

Exercice 4 –

1) Calculer dans $\mathbb{Q}[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X + 2)^{2013}$ par $X^2 + 4X + 3$.

2) Calculer dans $\mathbb{Q}[X]$ le reste de la division euclidienne de X^{2013} par X^2+2X+1.

★ **Exercice 5** – Soit K un corps. Soient $P \in K[X]$ non nul et Q un diviseur de P.

1) Montrer qu'il existe $(F, G) \in K[X]^2$ vérifiant : $P = FG$, F et G sont premiers entre eux, Q divise F, et tout facteur irréductible de F divise Q.

2) En déduire que le morphisme canonique $(K[X]/\langle P\rangle)^* \to (K[X]/\langle Q\rangle)^*$ est surjectif.

Exercice 6 – Trouver tous les couples $(x, y) \in (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2$ vérifiant : $\bar{2}x + y = \bar{1}$ et $x + \bar{2}y = \bar{3}$.

Exercice 7 – Quels sont, dans $\mathbb{F}_3[X]$, les polynômes unitaires irréductibles de degré 2 ?

Exercice 8 – L'anneau $\mathbb{F}_2[X]/\langle X^4 + X^2 + 1\rangle$ est-il un corps ?

Exercice 9 – Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{F}_2[X]/\langle X^3 + 1\rangle$?