Corrigé du devoir n^o 1

Exercice 1.

a. Faux car $y = -x - 1$ ne convient pas (n.b. : x est fixé au moment du choix de y). Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0$.

b. Vrai, $y = 1 - x$ convient. Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0$.

c. Vrai, prendre $x = 1$ et $z = y^{-1}$ par exemple. Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R},\ xyz \neq 1$.

d. Vrai car $A^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$ pour A réel. Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x \neq -y)$ et $((x + y)^2 = 0)$.

Exercice 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit a un entier naturel. On note : $S_a(n) = \sum_{k=1}^{n} k^a$.

a. Pour $n = 1$ on a : $S_1(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Supposons par hypothèse de récurrence qu'on a $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ pour un entier n fixé. Alors $S_1(n + 1) = S_1(n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui montre la propriété cherchée au rang $n + 1$. On peut donc conclure que l'égalité est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

b. Pour $n = 1$ on a : $S_1(1)^2 = 1^2 = 1 = S_3(1)$. Supposons par hypothèse de récurrence que l'égalité $S_1(n)^2 = S_3(n)$ est vraie pour un entier n fixé. On a alors : $S_1(n + 1)^2 = (S_1(n) + (n + 1))^2 = S_1(n)^2 + (n+1)^2 + 2(n+1)S_1(n) = S_3(n) + (n+1)^2 + 2(n+1)\frac{n(n+1)}{2} = S_3(n) + (n+1)^3 = S_3(n+1)$. Ceci montre donc l'égalité au rang $n + 1$. On peut conclure par récurrence que l'égalité est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

c. On déduit des deux premières questions que : $\forall n \geqslant 1,\ S_3(n) = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

Exercice 3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f_{a,b}$ l'application

$$f_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b. \end{array}$$

a. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soient x et y deux réels quelconques. Alors : $f_{a,b}(x) = f_{a,b}(y) \Rightarrow ax + b = ay + b \Rightarrow ax = ay$. Donc si $a \neq 0$, $f_{a,b}$ est injective (car alors $ax = ay \Rightarrow x = y$). De plus si $a = 0$, $f_{a,b}$ est une fonction constante et n'est donc pas injective sur $\mathbb{R}$.

Prenons alors z dans l'espace d'arrivée : on cherche x dans l'espace de départ tel que $f_{a,b}(x) = z$. Or : $f_{a,b}(x) = z \Leftrightarrow ax + b = z \Leftrightarrow x = \frac{z-b}{a}$, ce qui n'est valable que dans le cas où $a \neq 0$. Donc si $a \neq 0$ la fonction $f_{a,b}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On sait enfin que lorsque $a = 0$ la fonction $f_{a,b}$ est constante et n'est donc pas surjective dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : l'ensemble des couples (a, b) tels que $f_{a,b}$ est injective est le même que l'ensemble des couples (a, b) tels que $f_{a,b}$ est surjective et cet ensemble est $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

b. On a $f_{a,b} = f_{c,d} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f_{a,b}(x) = f_{c,d}(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ ax + b = cx + d$. Comme cette dernière égalité doit être vérifiée pour tout x réel, elle doit l'être en particulier pour $x = 0$, ce qui donne : $b = d$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ ax + b = cx + b \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ ax = cx$. Cette dernière égalité prise en $x = 1$ donne alors $a = c$.

c. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ (a,b) & \mapsto & f_{a,b}. \end{array}$$

F est injective car d'après la question précédente : $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2,\ F(a,b) = F(c,d) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$. F n'est pas surjective car, par exemple, la fonction $x \to x^2$ n'est pas une fonction affine, i.e. il n'existe pas de couple de réels (a,b) tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ ax+b = x^2$.

Exercice 4. Soit E un ensemble non vide et A un sous-ensemble de E. On considère la fonction :

$$\chi_A : E \to \{0,1\}$$

définie par : $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

a. Si $A = B$, $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$ pour tout $x \in A$ et $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$ pour tout $x \notin A$, ce qui montre donc $\chi_A = \chi_B$. Réciproquement si $\chi_A = \chi_B$, alors $\forall x \in A,\ \chi_B(x) = \chi_A(x) = 1$, donc $x \in B$; on a donc $A \subset B$. De même en échangeant A et B, ce qui donne donc $B \subset A$, et par double inclusion : $A = B$.

b. Soit $x \in A \subset E$, alors $\chi_A(x) = \chi_E(x) = 1$ et $\chi_{\complement A}(x) = 0$ car $x \notin \complement A$. Soit $x \in \complement A \subset E$, alors $\chi_A(x) = 0, \chi_E(x) = 1, \chi_{\complement A}(x) = 1$. Donc on a dans tous les cas : $\chi_{\complement A}(x) = \chi_E(x) - \chi_A(x)$.

On vérifie de même : $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$ et $\chi_{A-B} = \chi_{A\cap\complement B} = \chi_A(\chi_E - \chi_B) = \chi_A - \chi_A\chi_B$.

c. On a en utilisant la question précédente : $\chi_{A\triangle B} = \chi_{A\cup B - A\cap B} = \chi_{A\cup B} - \chi_{A\cup B}\chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B - (\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)\chi_A\chi_B = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$.

d. Soient A,B,C trois sous-ensembles de E. En utilisant la question précédente on calcule : $\chi_{A\triangle(B\triangle C)} = \chi_A + \chi_{B\triangle C} - 2\chi_A\chi_{B\triangle C} = \chi_A + (\chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C) - 2\chi_A(\chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C) = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_B\chi_C + \chi_C\chi_A) + 4\chi_A\chi_B\chi_C$.
Parallèlement on calcule : $\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C = (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\chi_C = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C$. On voit donc que les fonctions caractéristiques des ensembles $A\triangle(B\triangle C)$ et $(A\triangle B)\triangle C$ sont égales, ce qui signifie d'après la première question que les ensembles sont égaux.