
Devoir Surveillé de Mathématiques n° 1

Durée 1h20. Documents interdits

Le 21 octobre 2006 (10h30 – 11h50)

Barème indicatif : $3 + 4 + 3 + 6 + 5 = 21$

Exercice 1. [Cours]

- a. Donner la définition d'une application injective et la définition d'une application surjective.
- b. On note E le sous-ensemble $\{1, 2, 3\}$ de \mathbb{N} . Déterminer l'ensemble des applications injectives f de E dans lui-même telles que $f(1) = 1$. Sont-elles bijectives ?

Exercice 2. Soient E un ensemble. Pour toute partie X de E on note $\complement_E X$ le complémentaire dans E de la partie X . Soient A, B et C des parties de E .

- a. Ecrire sous la forme d'une formule avec quantificateurs les assertions suivantes :
 - (i) La partie A est contenue dans le complémentaire dans E de la partie C .
 - (ii) Le complémentaire dans E de la partie C n'est pas contenu dans l'intersection des parties A et B .
- b. (i) Montrer que $\complement_E(B \cap \complement_E A) = A \cup \complement_E B$.
(ii) Montrer que $A \cup \complement_E B = E$ si et seulement si $B \subset A$.

Exercice 3. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 le nombre rationnel

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{k^2 - k} + \dots + \frac{1}{n^2 - n}$$

est égal à $\frac{n-1}{n}$.

Exercice 4. On considère l'application $f : x \rightarrow x^2 - 6x + 7$ de \mathbb{R} dans lui-même.

- a. Déterminer l'image directe $f(A)$ par f de la partie $A = \{-2, 1, 0, 8\}$ de \mathbb{R} .
- b. Déterminer les images réciproques $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(D)$ des parties suivantes de \mathbb{R} :
 $B = \{-3\}$ et $D = \{-3, 2\}$.
- c. (i) L'application f est-elle injective ?
(ii) L'application f est-elle surjective ?
- d. Quels sont les éléments de \mathbb{R} qui possèdent un et un seul antécédent ?

Exercice 5.

- a. Calculer d le PGCD des nombres entiers 585 et 247.
- b. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tels que $d = 585u + 247v$
- c. Quels sont les entiers relatifs qui divisent à la fois 585 et 247 ?