FEUILLE D'EXERCICES n° 2

Exercice 1 – Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y, y - z) \qquad\qquad P \mapsto P' - P,$$

où $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de de $\mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant n$.

Exercice 2 – Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 13e_1 + 12e_2 + 6e_3 \\ f(e_2) &= -8e_1 - 7e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) &= -12e_1 - 12e_2 - 5e_3 \end{aligned}$$

Démontrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = -u\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer leurs dimensions.

Exercice 3 – Soit $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -e_2 + e_3 - e_4 \\ f(e_2) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= e_1 + e_4 \\ f(e_4) &= e_2 - e_3 + e_4 \end{aligned}$$

(1) Déterminer f^2.
(2) En déduire que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, puis que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
(3) Calculer $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 4 – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $AD = DA$.
(2) Avec les valeurs de a,b trouvées au 1), on pose $N = A - D$. Calculer N^2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
(3) Calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 5 – On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer son noyau et son image (on donnera une $\mathbb{R}$-base dans chaque cas).
(2) Déterminer la matrice de φ^n, $n \geqslant 1$.
(3) Calculer le polynôme caractéristique de φ, et ses valeurs propres.

(4) φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 – Pour quelles valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(1, m, 1)$, $(2, m, 3)$, $(4, m^2, 9)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7 – On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour $M = A$, puis pour $M = B$.

(1) Calculer le polynôme caractéristique de M, puis ses valeurs propres.
(2) M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Déterminer chacun des sous-espaces propres, et proposer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.
(3) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.
(4) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer M^n en fonction de n.

Exercice 8 – On considère la matrice

$$M_t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la matrice M_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 – On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Est-elle diagonalisable ? Pourquoi est-elle trigonalisable ?
(2) Déterminer une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telle que $M = PTP^{-1}$.

Exercice 10 – Soit $x_1, \dots, x_n$ des complexes tous *distincts*. On considère la matrice de van der Monde

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) Calculer son déterminant et en déduire qu'elle est inversible.
(2) Montrer qu'un polynôme de degré $< n$ dont les valeurs en n points distincts sont connus est uniquement déterminé.