Université Bordeaux 1
Mathématiques

PIN 401
Année 2012–2013

FEUILLE D'EXERCICES n^o 3

Exercice 1 – Soit $m \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2 - m \\ 1 & m-1 & 3m-1 & m^2 - m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire la dimension du noyau et de l'image de A en fonction de m.

Exercice 2 – Résoudre les systèmes différentiels $X' = AX$, $X(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ où $X = (x(t), y(t))$ et A est l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

★ **Exercice 3** – Donner la solution générale $X = (x(t), y(t), z(t))$ de l'équation $X' = AX$, où A est l'une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 – On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$$

1) Quels sont les points d'équilibre ?

2) Soient (a, b) réels et $S(t) = (x(t), y(t))$ la solution telle que $S(0) = (a, b)$. Déterminer a et b tels que $\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$.

3) Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - 2y + \sin t \end{cases}$$

et montrer que toutes ses solutions sont bornées pour $t \geqslant 0$.

Exercice 5 – Vérifier que les deux matrices suivantes sont orthogonales

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$? Si oui, donner une base de diagonalisation.

Exercice 6 – Soit $a \in \mathbb{R}$ et $q(x,y) = x^2 + 4xy + ay^2$ une forme quadratique. À quelle condition sur a s'agit-il d'un produit scalaire ?

Exercice 7 – Soient $u_1 = (1,2,2)$ et $u_2 = (1,0,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Trouver une base (e_1, e_2, e_3) *orthogonale* telle que $u_1 = e_1$ et le plan engendré par (e_1, e_2) coïncide avec le plan engendré par (u_1, u_2).

Exercice 8 – On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique et le plan P d'équation

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Écrire la matrice de la projection orthogonale sur P.

Exercice 9 – Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], K)$ le K-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans K, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Montrer que $f \mapsto \int_0^1 |f(t)|^2\, dt$ est une forme quadratique (hermitienne si $K = \mathbb{C}$).

2) Donner sa forme polaire. Est-ce un produit scalaire ?

3) On suppose que $K = \mathbb{C}$. Montrer que les fonctions $e^{2i\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$ forment une famille orthonormée. Quelle est la projection orthogonale de la fonction $t \mapsto t$ sur l'espace qu'elles engendrent ? Est-ce une base de E ?

4) On suppose que $K = \mathbb{R}$. Trouver une famille orthonormée simple analogue à celle de la question précédente.

5) On fixe N et on considère la famille de fonctions $(1, t, t^2, \ldots, t^{N-1})$. Écrire la matrice de Gram associée.

6) On fixe $N = 4$, trouver une famille $(B_0, \ldots, B_3)$ *orthogonale* engendrant le même espace que $(1, t, t^2, t^3)$.

★ **Exercice 10** – Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, on considère le cube C défini par les $(x_1, \ldots, x_4)$ vérifiant $|x_i| \leqslant 1$ pour tout i, et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_4 = 0$. On peut voir le solide $C \cap H$ comme élément de l'espace euclidien usuel, de dimension 3. Montrer que c'est un octaèdre régulier. (Dans l'espace à 3 dimensions, le solide d'équation $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$ est un octaèdre régulier. Le dessiner.)
Indication : la matrice A suivante vérifie ${}^tAA = \mathrm{Id}$, poser $(y_i) = A(x_i)$:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$