Université Bordeaux 1 **PIN 401**
Mathématiques Année 2012–2013

## FEUILLE D'EXERCICES n° 4

**Exercice 1** – On lance une infinité de fois une pièce de monnaie. On obtient une suite infinie formée de piles et de faces, qui appartient à $\{\mathsf{Pile}, \mathsf{Face}\}^{\mathbb{N}}$. On note $A_n$ l'événement « Pile apparaît au $n$-ème coup ». Décrire les événements suivants avec des opérations ensemblistes :

(1) On obtient au moins un Pile.
(2) On obtient jamais Pile.
(3) On obtient exactement un Pile.
(4) On n'obtient que des Face après le 100-ème coup (inclus).
(5) On obtient Pile un nombre fini de fois.
(6) On obtient Pile un nombre infini de fois.

**Exercice 2** – On dispose de deux jetons, l'un avec deux faces blanches, l'autre avec une face blanche et une face noire. On tire au sort l'un des jetons, on le lance, et on observe une face blanche visible. Quelle est la probabilité que l'autre face soit blanche ?

**Exercice 3** – Une urne contient 5 boules : 3 blanches et 2 rouges. On effectue trois tirages successifs, sans remise, d'une boule dans cette urne. La variable aléatoire $X$ donne à l'issue de ces trois tirages le rang d'apparition de la première boule rouge, et 0 s'il n'en apparaît pas.

(1) Définir la loi de probabilité de $X$. Calculer son espérance $\mathbb{E}(X)$.
(2) Définir et représenter sa fonction de répartition $F$.
(3) En supposant qu'une boule rouge apparaitra lors des trois premiers tirages, quelle est la probabilité d'apparition d'une blanche au premier tirage ?

**Exercice 4** – On jette deux dés à 6 faces équilibrés $D_X$ et $D_Y$. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ donnent à l'issue de chaque double jet respectivement le nombre affiché par $X$ et $Y$.

(1) Donner les lois de probabilité de $X$, $Y$ et $Z = X + Y$. Calculer pour chacune de ces variables aléatoires son espérance et sa variance.
(2) On organise un jeu : le participant mise $M$ Euros, il jette deux dés et gagne une certaine somme en fonction du résultat. Dans chacun des trois cas suivants, exprimer la variable aléatoire $G =$ « gain du joueur » en fonction de $X$, $Y$ et $M$. Calculer $\mathbb{E}(G)$, puis conseillez l'organisateur du jeu pour le choix de la valeur $M$.
   - On gagne 5 Euros par point marqué, i.e. $5(X + Y)$.
   - On gagne $aX + bY$, où $a, b$ sont deux réels.
   - On gagne $(X - Y)^2$.

**Exercice 5** – $k$ urnes numérotées $U_1, \ldots, U_k$ contiennent chacune $n$ boules numérotées de 1 à $n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, la variable $X_i$ associe à chaque tirage de $k$ boules, une par urne, le numéro de celle qui est issue de $U_i$. La variable $M$ donne le plus grand de ces numéros.

(1) Pour $i = 1, \ldots, k$, donner la fonction de répartition $F_i$ de $X_i$.
(2) Donner la fonction de répartition $F_M$ de $M$.
(3) En déduire la loi de probabilité de $M$.

**Exercice 6** – Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi de probabilité est définie, en fonction d'un paramètre réel $a$, par $\mathbb{P}(X = k) = a^k/2$.

(1) Calculer $a$, puis $\mathbb{E}(X)$.
(2) Donner la fonction de répartition de $X$ et tracer sa représentation graphique entre les abscisses $-2$ et 4.

**Exercice 7** – Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}_{>0}$, dont la loi de probabilité est définie, en fonction d'un paramètre réel $a$, par $\mathbb{P}(X = k) = a/(k + k^2)$. Calculer $a$. Que dire de $\mathbb{E}(X)$ ?

**Exercice 8** – Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont la densité $f$ est définie, en fonction d'un paramètre réel $a$, par $f(x) = ae^{-2x}$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

(1) Calculer $a$, puis $\mathbb{P}(X \in [-2, 4])$ et $\mathbb{E}(X)$.
(2) Donner la fonction de répartition $F$ de $X$. Utiliser $F$ pour calculer $\mathbb{P}(X \in [-2, 4])$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 2)$. Que dire de $\lim_{t \to +\infty} F(t)$ ?

**Exercice 9** – Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont la densité $f$ est définie, en fonction d'un paramètre réel $a$, par $f(x) = ax^{-2}$ si $x \geqslant 1$ et $f(x) = 0$ sinon. Calculer $a$, puis $\mathbb{P}(X \in [-2, 4])$. Que dire de $\mathbb{E}(X)$ ?

**Exercice 10** – On effectue une épreuve $E$ au cours de laquelle un événement $A$ peut se produire avec probabilité $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire $X_1$ prend la valeur 1 si $A$ se produit pendant l'épreuve $E$, et 0 sinon.

On effectue successivement $n$ fois l'épreuve $E$ dans des conditions identiques et indépendantes. À chacune des $n$ réalisations de $E$, on attache une variable aléatoire $X_i$, $i = 1, \ldots, n$, comme précédemment. On note $X$ la variable qui à l'issue des $n$ réalisations donne le nombre de fois que $A$ s'est réalisée.

(1) Définir la loi de probabilité de $X_1$, et calculer son espérance et sa variance.
(2) Exprimer $X$ en fonction des $X_i$, donner la loi de probabilité de $X$, son espérance et sa variance.

**Exercice 11** – On reprend les conditions de l'exercice précédent consistant en $n$ réalisations d'une épreuve $E$. Soit $Y$ la variable aléatoire qui donne le rang de la première apparition de $A$ (et vaut 0 s'il n'apparaît pas). Définir la loi de $Y$, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

**Exercice 12** – La variable $X$ suit une loi binomiale $B(n, p)$. Calculer $\mathbb{E}(1/(X + 1))$.