Université Bordeaux 1
Mathématiques

PIN 401
Année 2012–2013

FEUILLE D'EXERCICES n° 5

Exercice 1 – (Ω, T, P) étant un espace probabilisé, A, B, C trois événements, exprimer $P(A \cup B \cup C)$ en fonction des probabilités de A, B, C, de leurs intersections 2 à 2 et de $A \cap B \cap C$.

Exercice 2 – Soient A, B, C trois événements, c'est-à-dire trois parties d'un ensemble Ω. Lorsqu'on « tire au hasard » un élément $\omega \in \Omega$, on dit que A *se produit* si $\omega \in A$. Décrire avec des opérations ensemblistes $(\cap, \cup, \dots)$ les événements suivants :

(1) A et B se produisent.
(2) A seul se produit.
(3) L'un au moins des événements A, B, C se produit.
(4) Parmi A, B, C, deux événements au moins se produisent.
(5) Un événement au plus se produit.
(6) Aucun des trois événements ne se produit.
(7) Deux événements exactement se produisent.

Exercice 3 – Un dé est « pipé » de sorte que la probabilité d'apparition de chacune de ses 6 faces soit proportionnelle au nombre (1 à 6) qu'elle indique.

1) Construire un espace probabilisé adapté à l'épreuve consistant à jeter ce dé une fois.

2) Donner les probabilités de chacun des 6 événements élémentaires.

3) Donner les probabilités de $A =$ « obtenir un nombre pair », $B =$ « obtenir un multiple de 3 ».

Exercice 4 – Une cible est constituée de 5 zones délimitées par 5 cercles concentriques de rayons respectifs 2, 4, 6, 8 et 10 cm. Les zones sont numérotées du centre vers la périphérie 5, 4, 3, 2 et 1. On tire 1 fois sur cette cible et on repère la zone contenant le centre de l'impact. On suppose que l'événement « le centre de l'impact est sur l'un des cercles-frontière » est de probabilité nulle et que l'on atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre chaque zone est proportionnelle à son aire.

1) Définir un espace probabilisé adapté à cette épreuve.

2) Donner la probabilité de chaque événement élémentaire et celle de l'événement $A =$ « on atteint une zone de numéro $\leqslant 3$ ».

Exercice 5 – On range au hasard n boules numérotées $1, 2, \dots, n$ dans n tiroirs numérotés de même, une par tiroir. On s'intéresse aux événements $A =$ « la boule 3 est dans le tiroir 3 » et $B =$ « les boules 3 et 5 sont globalement dans les tiroirs 3 et 5 ». Définir un espace probabilisé adapté à cette épreuve et calculer les probabilités des événements A et B.

Exercice 6 – Un automate comporte un réservoir de n boules qu'il distribue dans un alignement de p tiroirs numérotés dans l'ordre de 1 à p. Initialement, il est positionné, portant ses n boules, au dessus du tiroir T_1. La lecture du bit « » provoque la chute d'une boule. La lecture du bit « » provoque le déplacement sur le tiroir suivant.

1) Pour qu'après lecture du dernier bit l'automate se retrouve vide au dessus du tiroir T_p, combien de bits son code de commande doit-il comporter ? Combien doit-il comporter de « » ?

2) On choisit au hasard un de code de longueur $n + p$ et on l'utilise pour programmer l'automate. On s'intéresse à l'événement $A =$ « toutes les boules tombent dans le même tiroir ». Définir un espace probabilisé adapté à cette épreuve et calculer la probabilité de A.

Exercice 7 – n et p sont des entiers naturels non nuls. 0n appelle solution entière de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ tout p-uplet $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ élément de $\mathbb{N}^p$ tel que $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$. Si l'on choisit au hasard l'une des solutions de l'équation, quelle est la probabilité qu'elle comporte $p - 1$ zéros ?

Exercice 8 – On place au hasard sur une même étagère les n tomes d'une encyclopédie. Avec quelle probabilité les tomes 1 et 2 se retrouvent-ils côte à côte ? Ne pas oublier de définir l'espace probabilisé correspondant.

Exercice 9 – On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir pile en un jet ? (Définir l'espace probabilisé).

2) Définir l'espace probabilisé correspondant à une suite de n jets successifs de la pièce. Calculer la probabilité de chacun des événements : $A_k =$ « Obtenir pile au k-ème jet » (pour $1 \leqslant k \leqslant n$) $B_k =$ « Obtenir pile pour la première fois au k-ème jet » (pour $1 \leqslant k \leqslant n$).

Exercice 10 – X et Y jettent alternativement un dé à 6 faces : X joue les jets impairs, Y les jets pairs. Le premier à obtenir un 6 gagne, et le jeu s'arrète. Calculer les probabilités des événements suivants :

1) X gagne au $2p + 1$-ème jet,

2) X gagne,

3) Y gagne,

4) personne ne gagne.

Exercice 11 –

1) On jette simultanément trois dés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir $\{4, 2, 1\}$?

2) On effectue ce triple jet jusqu'à obtenir $\{4, 2, 1\}$. Quelle est la probabilité de ne pas y être encore parvenu à la n-ème épreuve ? de ne jamais y parvenir ?

Exercice 12 – On tire 5 cartes d'un jeu de 32.

1) Quelle est la probabilité de tirer au moins un roi ?

2) Quelle est la probabilité de tirer au moins un roi sachant qu'on a tiré 5 trèfles ?

Exercice 13 – Un hospital reçoit exclusivement des malades atteints de la maladie A (40% des malades), de la maladie B (30%) et de la maladie C (30%). Parmi les malades de A (resp. B, resp. C), 50% (resp. 60%, resp. 40%) sont fumeurs. Quel est le pourcentage de fumeurs dans l'ensemble des malades ?

Exercice 14 – Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. On en extrait les boules une à une successivement et sans remise.

1) Définir un espace probabilisé adapté à cette épreuve.

2) Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant 10$, on note B_k l'événement « tirer une blanche au k-ème tirage ». On note A l'événement « obtenir une blanche pour la première fois au 6-ème tirage ». Exprimer A en fonction de certains B_k et de leurs complémentaires.

3) Calculer la probabilité de A à l'aide de la formule des probabilités composées. Vérifier le résultat par un calcul direct.

Exercice 15 – Un laboratoire teste un éthylotest sur un échantillon de volontaires : pour une personne en état (légal) d'ébriété, l'éthylotest s'avère positif 95 fois sur 100 ; pour une personne qui n'est pas dans cet état, il est négatif 96 fois sur 100. On estime que sur l'ensemble des conducteurs contrôlés, 2% sont en état d'ébriété.

Quelle est la probabilité qu'un conducteur contrôlé soit réellement en état d'ébriété lorsque l'éthylotest est positif ?

Exercice 16 – Une commande est assurée par deux circuits indépendants A et B branchés en parallèle : tant que l'un des circuits fonctionne la commande fonctionne. La probabilité de panne de A est de 0.02 et celle de B est de 0.05.

1) Quelle est la probabilité de non fonctionnement de cette commande ?

2) Avec quelle probabilité l'un au moins des circuits est-il en panne ?

3) Si l'un des circuits ne fonctionne pas, quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 17 – On jette simultanément deux dés D_1 et D_2 à 6 faces. On considère les événements : « D_1 affiche un nombre pair », « D_2 affiche un nombre pair », et « la somme des résultats est paire ». Montrer que ces trois événements sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 18 – On jette un dé jusqu'à ce qu'un 6 apparaisse.

1) Pour $k \geqslant 1$, quelle est la probabilité p_k qu'il ait fallu jeter k fois le dé ?

2) Pour $n \geqslant 1$, quelle est la probabilité qu'il ait fallu jeter le dé moins de n fois ?

3) On jette simultanément 5 dés. On reprend seulement ceux qui n'ont pas donné 6 et on les jette une seconde fois. On itère le procédé jusqu'à ce que tous les dés aient indiqué 6. Quelle est la probabilité que l'on obtienne les cinq 6 en $n \geqslant 1$ jets au plus ? Même question en n jets exactement.