Devoir n° 4

À rendre pour le premier TD de la semaine du ??/??.
Notez lisiblement la lettre de votre section suivie de votre numéro de groupe dans le coin supérieur droit de votre copie.

Exercice 1. Montrez que les limites suivantes existent et calculez leur valeur.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 2} \sin(1/x)$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{\sin(x)^2} - \dfrac{1}{1 - \cos(x)}$

Exercice 2. Soit f définie par $f(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. f est-elle continue sur son ensemble de définition ?

2. Déterminez en fonction de a la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 (si cette limite existe). Même chose en -1. (On précisera éventuellement les limites à gauche et à droite si elles diffèrent.)

3. Déterminez en fonction de a si f peut être prolongée par continuité en 1 ? En -1 ?

Exercice 3. Soit f définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$. On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}, |f(x)| \leq k\,|x|.$$

Expliquez par un dessin ce que signifie cette condition sur f.
Montrez que f continue en 0 si et seulement si $f(0) = 0$.

Exercice 4. Soit f définie par $f(x) = xE(\frac{1}{x})$ où E est la fonction partie entière. Étudiez la continuité de f en chaque point de son ensemble de définition.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que f admet au moins une racine.
Application : montrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.