Corrigé du devoir n° 6

Remarque préliminaire importante : dans le corrigé des exercices 2,3 et 4, nous désignerons par ϵ une fonction définie sur un voisinage de 0, telle que $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. Il s'agit là d'un abus de notation, puisqu'on désigne ainsi par un même symbole, d'une ligne à l'autre, plusieurs fonctions a priori différentes. Cela dit, lorsque plusieurs de ces fonctions interviennent dans une même ligne de calcul, on utilisera un indice, en les notant ϵ_1, ϵ_2... Cette convention est acceptable dans la mesure où la connaissance précise de ces fonctions ϵ (les fonctions "reste") n'est pas nécessaire, seul importe le fait qu'elles tendent vers 0 lorsque x tend vers 0.

Exercice 1.
1) La fonction f est définie en tout point x tel que $|x| \leq 1$ et $\left|2x\sqrt{1-x^2}\right| \leq 1$. Cette dernière inégalité est toujours vérifiée. En effet, elle est équivalente, en élevant au carré, à $(x^2 - 1/2)^2 = x^4 - x^2 + 1/4 \geq 0$. La fonction f est donc définie sur l'intervalle $[-1, 1]$, et continue sur cet intervalle, comme composée de fonctions continues. La question de la dérivabilité de f est un petit peu plus délicate. Déjà, la fonction racine carrée n'étant pas dérivable en 0, le domaine de dérivabilité de f est inclus dans $]-1, 1[$. Ensuite, la fonction Arcsinus est dérivable sur $]-1, 1[$, donc f ne peut être dérivable au point $x \in]-1, 1[$ que si $\left|2x\sqrt{1-x^2}\right| \neq 1$, ce qui revient à demander que $|x| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Maintenant, sur $]-1, \frac{-\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$, f est bien dérivable, par le théorème de dérivation des fonctions composées .
2) En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient :

$$f'(x) = (2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}) \times \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \frac{2-4x^2}{\sqrt{(1-x^2)(2x^2-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \times \text{signe}(1-2x^2).$$

Par conséquent, sur l'intervalle $]\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$, f a même dérivée que la fonction $x \mapsto 2\text{Arcsin}(x)$. A une constante près, ces deux fonctions coïncident donc sur cet intervalle. Puisqu'elles s'annulent toutes les deux en 0, on obtient finalement :

$$f(x) = 2\text{Arcsin}(x), \forall x \in [\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}].$$

Remarquons que le raisonnement qui précède ne donne l'égalité ci-dessus que sur l'intervalle ouvert $]\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$. L'égalité aux bornes peut résulter d'un calcul direct, mais il est préférable de la voir comme conséquence du résultat général suivant : si deux fonctions continues définies sur un intervalle fermé I sont égales sur l'intérieur de I, alors elles le sont aussi aux bornes de I.
Sur $]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$, on trouve de même que f et $x \mapsto -2\text{Arcsin}(x)$ sont égales, à une constante près. Vu que $f(1) = 0$, on a donc :

$$f(x) = \pi - 2\text{Arcsin}(x), \forall x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1].$$

De même, on a enfin :

$$f(x) = -\pi - 2\text{Arcsin}(x), \forall x \in [-1, \frac{-\sqrt{2}}{2}].$$

Exercice 2.
1) Appliquons la formule de Mac-Laurin à l'ordre 2 à la fonction $x \mapsto e^{2x}$. On trouve :

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + x^2\epsilon(x).$$

Appliquant cette même formule à la fonction $x \mapsto \sqrt{1+4x}$, on a :

$$\sqrt{1+4x} = 1 + 2x - 2x^2 + x^2\epsilon(x).$$

On obtient ainsi :

$$\frac{e^{2x} - \sqrt{1+4x}}{x^2} = 4 + \epsilon(x).$$

Par conséquent, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \sqrt{1+4x}}{x^2} = 4$.
2) On sait (par exemple avec la formule de Mac-Laurin) que :

$$\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 + t^3\epsilon(t).$$

On a donc, en faisant $t = x + ax^2$:

$$\ln(1 + x + ax^2) = (x + ax^2) - (x + ax^2)^2/2 + (x + ax^2)^3/3 + x^3\epsilon(x).$$

En développant les puissances en en regroupant les termes, on trouve :

$$\ln(1 + x + ax^2) = x + (a - 1/2)x^2 + (1/3 - a)x^3 + x^3\epsilon(x).$$

Il nous reste à trouver le développement limité d'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $x \mapsto e^x\sin(x)$. Pour cela, on utilise les développements limités du sinus et de l'exponentielle à l'ordre 3 en $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^3\epsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - x^3/6 + x^3\epsilon(x).$$

En multipliant ces deux égalités, puis en regroupant dans le reste les termes négligeables devant x^3, on trouve :

$$e^x\sin(x) = x + x^2 + x^3/3 + x^3\epsilon(x).$$

On trouve ainsi :

$$\frac{e^x\sin(x) - \ln(1 + x + ax^2)}{x^3} = (3/2 - a)x^{-1} + a + \epsilon(x).$$

Il est ainsi clair que la limite cherchée existe si et seulement si $a = 3/2$, auquel cas elle est égale à $3/2$.
3) Cette dernière question se traite à nouveau avec les développements limités. Posons $x = 1+h$. Nous avons :

$$\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{1 - x + \ln(x)} = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}h)}{-h + \ln(1+h)} = \frac{(\frac{\pi}{2}h + h\epsilon_1(h))^2}{-h^2/2 + h^2\epsilon_2(h)} = \frac{(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1(h))^2}{-1/2 + \epsilon_2(h)}.$$

La limite cherchée est donc égale à $-\frac{\pi^2}{2}$.

Exercice 3.
1) La fonction f est définie pour tout $x > -1$.

2) Pour trouver la limite demandée, effectuons un développement limité de f à l'ordre 3 en $x = 0$. Pour ce faire, on procède comme dans l'exercice 2, question 2, en multipliant les développements limités à l'ordre 3 en $x = 0$ de cosinus et de $x \mapsto \ln(1 + x)$:

$$f(x) = (1 - x^2/2 + x^3\epsilon_1(x))(x - x^2/2 + x^3/3 + x^3\epsilon_2(x)) = x - x^2/2 - x^3/6 + x^3\epsilon_3(x).$$

On a donc :

$$\frac{f(x) - \frac{x(2-x)}{2}}{x^3} = -1/6 + \epsilon_3(x).$$

La limite cherchée est donc $-1/6$.

3) Le développement limité de f donne tout de suite la réponse à cette question (pour cela, un développement d'ordre 2 aurait d'ailleurs suffi). La droite (T) est d'équation $y = x$, et puisque le coefficient de x^2 est négatif, (C) est localement située en-dessous de (T).

Exercice 4.

1) On peut résoudre cette question en composant des développements limités. Néanmoins, il est ici tout aussi simple de calculer les dérivées première et seconde de $h(x) := e^{\frac{1}{1-x}}$:
$h'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}}$, $h''(x) = \frac{3-2x}{(1-x)^4}e^{\frac{1}{1-x}}$.
Grâce à la formule de Mac-Laurin, on en tire :

$$h(x) = e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + x^2\epsilon(x).$$

2a) Calculons la dérivée de f :

$$f'(x) = e^{\frac{x}{1-x}}\frac{x}{(x-1)}.$$

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $]1, +\infty[$, et décroissante sur $[0, 1[$. L'expression $e^{\frac{x}{1-x}}$ a pour limite e^{-1} quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Il nous faut encore examiner le comportement de f en $x = 1$. Quitte à poser $x = 1+h$ pour s'en convaincre, cette question est une simple application des théorèmes de croissance comparée. On a alors $\lim_{x\to1^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

2b) Calculons maintenant le développement limité de g à l'ordre 2 en $X = 0$.
On a $g(X) = (X^{-1}-1)e^{\frac{1}{X-1}}$. Pour atteindre notre objectif, il nous faut effectuer un développement limité à l'ordre 3, en $X = 0$ de la fonction $X \mapsto e^{\frac{1}{X-1}}$. Cette fois, nous n'allons pas calculer les dérivées successives de cette fonction, mais utiliser la composition des développement limités. On a :

$$\frac{1}{X-1} = \frac{-1}{1-X} = -1 - X - X^2 - X^3 + X^3\epsilon(X).$$

Par suite, en utilisant le développement limité de l'exponentielle à l'ordre 3 en 0, on trouve :
$e^{\frac{1}{X-1}} = e^{-1} \times e^{-X-X^2-X^3+X^3\epsilon(X)} = e^{-1}(1 + (-X - X^2 - X^3) + \frac{(-X-X^2-X^3)^2}{2} + \frac{(-X-X^2-X^3)^3}{6} + X^3\epsilon_1(X))$.
En développant, et en ne conservant dans la partie principale que les termes d'ordre plus petit que 3, on a :

$$e^{\frac{1}{X-1}} = e^{-1} - e^{-1}X - \frac{e^{-1}}{2}X^2 - \frac{e^{-1}}{6}X^3 + X^3\epsilon(X).$$

On trouve donc en définitive :

$$g(X) = e^{-1}(X^{-1}-1)(1-X-X^2/2-X^3/6+X^3\epsilon(X)) = e^{-1}(X^{-1}-2+X/2+X^2/3+X^2\epsilon_1(X)).$$

Par conséquent, la droite d'équation $y = e^{-1}x - 2e^{-1}$ est asymptote à (C), et (C) est située au-dessus de cette asymptote au voisinage de l'infini, puisque le coefficient de X est positif dans le développement limité. Remarquons qu'un développement de g à l'ordre 1 aurait suffi pour répondre à cette question.
Enfin, la demi-tangente à droite en $x = 1$ est parallèle à l'axe des abscisses (comme vous l'aurez sûrement remarqué, il y a une erreur d'énoncé à cet endroit : il n'y a évidemment pas de demi-tangente à gauche). En effet, on a :

$$f'_d(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{x}{1-x}} = 0.$$

Bonnes révisions pour l'examen !