Examen de Mathématiques

Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits

Le 3 septembre 2004

barème indicatif : 2, 4, 4, 6, 4.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 - i = 0$.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{x \sin(2x)}{1 - \cos(x)}, \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$$

Exercice 3. Soit $f \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{-x}\sin(x)}{x}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 ainsi que la position du graphe de f par rapport à celle-ci.

Exercice 4. Dans cet exercice, on énoncera avec soin chacun des théorèmes utilisés.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\cos(x) + 1$.

1. Calculer f' et f''. Faire le tableau de variation de f' et de f sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. Montrer que f a un unique maximum entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (on ne cherchera pas à calculer sa valeur).

2. a) Montrer que $-3 \leq f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

b) En déduire que $1 + x - \frac{3x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3. a) Montrer que f s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]\pi/2, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$.

b) En déduire que f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]\pi/2, 2\pi[$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Calculer f' (on pourra éventuellement simplifier l'expression de $f'(x)$ en utilisant que $(1 - X)^2 + 4X = (1 + X)^2$). Que vaut la dérivée de $f(x) - 2\operatorname{Arctan}(x)$?

3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

4. En déduire que $f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) - \pi$ pour tout $x \in]1, +\infty[$. Donner des formules analogues pour $f(x)$ sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, 1[$.