Examen de Mathématiques

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 19 janvier 2004

Barème indicatif : 3, 3, 5, 6, 4.

Question de cours. Démontrer qu'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I est croissante sur I si et seulement si $f'(x)$ est positive pour tout $x \in I$.

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2\sin x}{1 - e^x + \sin x},$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\text{Arctan}x)^{x^{-2}},$$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{x^{-2}}.$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{4}\cos x.$$

1. Enoncer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n , le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de Rolle.
2. Calculer $f'(x)$ et $f"(x)$ pour $x \in]0, 2[$.
3. Montrer que $|f"(x)| \leq \frac{9}{4}$ pour tout $x \in]0, 2[$.
4. Montrer que $f(x) \leq \frac{3}{4} - 2x + \frac{9}{8}x^2$, pour tout $x \in]0, 2[$. En déduire que $f(1) < 0$.
5. Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, 2[$.
6. En déduire que f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, 2[$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + 3x + \frac{1}{4})^{1/2}, \ x \geq 0, \\ \frac{1}{2} + x + \ln(1 + x^2), \ x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Est elle dérivable en 0 ?
2. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0]$.
3. Déterminer les limites
$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x).$$
Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection.
4. Déterminer les directions asymptotiques et asymptotes du graphe de f en $\pm\infty$ si elles existent.
5. On note par $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de f. Calculer $g(\sqrt{2})$ et $g'(\sqrt{2})$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(2x^2)}{x}$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 de f en 0. La fonction f se prolonge-t-elle en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui déterminer la tangente au graphe de f au point d'absisse 0 et la position du graphe de f par rapport à celle-ci.
2. Calculer la dérivée de f. La fonction f' est elle continue sur $\mathbb{R}$?