Feuille n^{o} 6

Convexité

Exercice 1. Soit $f(x) = \ln(\tan x)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est π-périodique.
3. Etudier les variations et la convexité de f sur $]0, \pi/2[$.
4. En déduire que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $|f(x)| \geqslant 2\,|(x - \pi/4)|$.
5. Montrer que la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(\pi/4, 0)$ et tracer la courbe.

Exercice 2. Soit $g(x) = \ln(\ln(x))$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est concave sur son domaine de définition.
3. En déduire l'inégalité
$$\forall a > b > 1, \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) > \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Exercice 3. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer que
$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}.$$

Bijection

Exercice 4. Déterminer les plus grands sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ pour que la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$
constitue une bijection entre A et B et déterminer la bijection réciproque.

Même question avec la fonction
$$g(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}.$$

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par
$$f(x) = \cos x + x.$$

1. Montrer que f définie une bijection entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et un intervalle I que l'on précisera.
2. On note $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Quel est le sens de variation de g.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I sauf en un point que l'on précisera.

4. Calculer $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$. En déduire une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, pour la fonction g, au point 1.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 6. Exprimer sans fonctions trigonométriques directes ou réciproques les expressions :

1. $\operatorname{Arccos}(\cos x)$ pour $x \in [0, 4\pi]$;
2. $\operatorname{Arctan}(\tan 2x)$ pour $x \in [0, \pi]$;
3. $\operatorname{Arccos}(\sin x)$ pour $x \in [0, 4\pi]$.

Exercice 7.

1. Montrer que si $ab < 1$,
$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$
[*On pourra poser* $\theta = \operatorname{Arctan} a$ *et* $\phi = \operatorname{Arctan} b$ *et calculer* $\tan(\theta + \phi)$].
2. Retrouver ces résultats en dérivant la fonction
$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right).$$
3. Qu'en est-il si $ab > 1$?
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. En déduire la limite
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 8.

1. Montrer que si $x \in]0, 1[$, $\operatorname{Arcsin} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Montrer que $\forall x \in]0, \infty[$, $\operatorname{Arctan} x \geqslant \frac{x}{1+x^2}$.
3. Montrer que si $x \in]0, 1[$, $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \pi/2$.

Exercice 9. On pose
$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

1. Préciser le domaine de définition de f et les points où éventuellement il y a un problème de dérivabilité.
2. Calculer et simplifier f' sur son domaine de dérivabilité.
En déduire une expression simple de f sur son domaine de définition.
3. Retrouver, à l'aide d'un changement de variable, l'expression simplifiée de f.

Croissance comparée

Exercice 10. Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

$$1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}; \quad 2)\ \lim_{x\to 0^+} 2x \ln\left(x + \sqrt{x}\right); \quad 3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x};$$

$$4) \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}; \quad 5) \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right); \quad 6) \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x};$$

$$7) \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}; \quad 8) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x; \quad 9) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}};$$

$$10 \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}.$$

Exercice 11. Soit α un réel strictement positif. Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{\ln(x)}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}}$$

En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$$

Exercice 12. Soit $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Soit $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

   où P_n est un polynôme.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de $f^{(n)}(0)$.
4. Donner le développement de Taylor de la fonction $\tilde{f}$ en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $[0, x]$.