

Introduction

Le contrôle d'écoulement

Optimiser l'aérodynamique interne et externe d'un avion par *contrôle des écoulements* a toujours été un enjeu majeur pour le développement du transport aéronautique. En effet, puisqu'une grande partie de l'énergie dépensée lors d'un vol est investie pour vaincre le frottement de l'air sur les parois (ailes, fuselages, dérive), réduire par contrôle (actif ou passif) la traînée permettrait d'augmenter l'autonomie en vol, ou encore de diminuer la masse au décollage, ce qui réduirait d'autant les coûts opérationnels. Mais les bénéfices potentiels du contrôle d'écoulement ne sont pas limités au domaine économique, réduction de l'émission de gaz polluant, de la nuisance sonore, ou encore gain de manœuvrabilité sont largement aussi attendus.

Les expérimentations sur le contrôle d'écoulement ont été initiées il y a près de 70 ans par Prandtl (1935) qui mit en évidence la réduction de la traînée derrière un cylindre lorsque de l'aspiration était appliquée sur une moitié de ce corps. Depuis cette date, les travaux expérimentaux, que ce soit sur maquette de laboratoire ou sur configuration réelle, n'ont jamais cessés (lire Gad-el-Hak, 2000 pour une présentation quasi-exhaustive des techniques de contrôle et Joslin, 1998 pour une revue des activités de recherche liées au contrôle laminaire ou *Laminar Flow Control*). Les approches théoriques du contrôle d'écoulement n'ont pas, quant à elles, eu le même développement. Certes, Schlichting dès 1942, apporta une première contribution en s'intéressant aux effets de l'aspiration sur une couche limite, mais le caractère fortement pluridisciplinaire, par nature, de ce champ d'activité a longtemps retardé son développement. Depuis une dizaine d'années, la théorie du contrôle, les approches mathématiques liées aux équations de Navier-Stokes, les méthodes numériques pour la simulation en Mécanique des Fluides et la résolution de problèmes d'optimisation ont atteint un niveau de maturité suffisant pour pouvoir reconsidérer¹ les problèmes classiques proposés par le contrôle d'écoulement de manière plus moderne, ce qui offre même pour parodier Bewley : "une nouvelle Renaissance" (Bewley, 2001).

Contrôle passif et contrôle actif

Les différentes méthodes de contrôle d'écoulement peuvent être classées suivant deux catégories : le *contrôle passif* et le *contrôle actif*. La première utilise principalement des caractéristiques géométriques ou physiques pour agir sur l'écoulement (forme des profils d'aile², propriété du fluide, etc...), tandis que la seconde utilise des informations relatives à l'écoulement (via des capteurs³) pour adapter son action (chauffage/refroidissement, soufflage/aspiration, vibrations, actions électromagnétiques, ...). Le principe du contrôle actif, *i.e.* avec un système (*contrôleur*) qui adapte le contrôle à l'écoulement, est le suivant :

- un capteur, placé en amont du dispositif physico-actif du contrôle (actionneur), envoie des informations (pression, cisaillement à la paroi, ...) au *contrôleur*
- le *contrôleur* fournit alors un signal à l'*actionneur*
- dans le cas du contrôle en boucle fermée, un second capteur est placé en aval de l'*actionneur*, et envoie lui aussi des informations sur le résultat du contrôle au *contrôleur* pour qu'il puisse optimiser son contrôle (si il n'y a pas de second capteur, on parle de contrôle en boucle ouverte).

1. N'oublions pas de manière plus matérielle, mais néanmoins tout aussi déterminante, les progrès réalisés par l'informatique.

2. Le problème se ramène alors à un problème d'optimisation de forme (voir Mohammadi et Pironneau, 2001).

3. Etant données les dimensions caractéristiques mises en jeu dans les phénomènes de contrôle d'écoulement, les capteurs et actionneurs sont de plus en plus souvent réalisés en technologie MEMS (*Micro-Electro-Mechanical-System*) (voir Gad-el-Hak, 2002, par exemple).

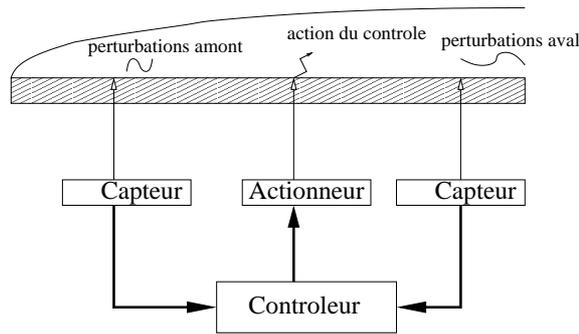


FIGURE 1 – Schéma de principe du contrôle actif en boucle fermée.

Une représentation de ce principe est donnée par le schéma 1 pour une configuration de couche limite (lire Kim, 2003, pour une revue des méthodes utilisées récemment pour contrôler un écoulement de couche limite turbulente). Des simulations de contrôle actif en boucle ouverte ont été réalisées par Joslin *et al.* (1995) et ont montré qu’une importante diminution de l’amplitude de l’onde incidente pouvait être réalisée, mais qu’un système en boucle fermée était nécessaire pour optimiser le contrôle, et parvenir à une meilleure compensation de l’onde d’entrée. Dans ces conditions, le contrôleur doit donc être capable de réagir en *temps réel* aux informations provenant du capteur de retour pour adapter le signal à envoyer à l’actionneur.

Contrôle d’écoulement et réduction de modèles : la problématique

Ces dernières années, les industriels du domaine aéronautique et automobile ont apporté un regain d’intérêt au contrôle actif d’écoulements et à l’optimisation de formes aérodynamiques. Formellement, ces problèmes se ramènent à minimiser une fonction objectif \mathcal{J} (coefficient de traînée, concentration de polluant, bruit émis,...) en fonction de N paramètres $\mathbf{c} = c_1, c_2, \dots, c_N$ (vitesse de soufflage/aspiration, flux de chaleur, paramètres de formes,...) sous certaines contraintes (équations de Navier-Stokes, contraintes géométriques,...). Les différentes méthodes de résolution existantes peuvent grossièrement être classées en deux catégories, les *méthodes de type descente* qui nécessitent au minimum une approximation du gradient de la fonction objectif, et les *méthodes stochastiques* dont le principe consiste à étudier l’évolution d’une population d’individus au cours de générations successives (algorithme génétique, méthode du simplexe, ...).

La première approche est connue pour sa rapidité de convergence et sa précision, mais malheureusement, elle ne converge *a priori* que vers un minimum local de la fonction objectif. Par ailleurs, elle nécessite le calcul du gradient de la fonction objectif qui est une tâche complexe en soi (Gunzburger, 1997a). Une fois le gradient connu, la résolution se fait généralement au moyen de procédures itératives, au cours desquelles on amène progressivement l’écoulement vers l’état souhaité. Ce type de méthodes nécessite donc un nombre important de résolution des équations du système et est donc extrêmement coûteux à mettre en œuvre, même pour des configurations académiques (Bewley *et al.*, 2001), et cela autant au niveau mémoire, qu’en temps d’exécution.

La seconde méthode présente l’avantage de converger *a priori* vers un minimum global de la fonction objectif. Cependant, elle s’accompagne, par principe, de temps de calcul tellement importants, qu’elle en fait une méthode inutilisable en pratique, à moins de la coupler⁴ avec une méthode de gradient et d’utiliser des machines de calcul parallèles pour évaluer les différents individus d’une population à une génération donnée.

Les approches généralement utilisées pour résoudre ces problèmes d’optimisation sont donc inadaptées aux applications du contrôle actif en boucle fermée, pour lesquelles le contrôleur a besoin de déterminer son action en temps réel. Une autre approche est donc nécessaire.

Réduction de modèles

4. Ces méthodes dites *hybrides* consistent à appliquer un algorithme génétique dans lequel les meilleurs individus sont régulièrement améliorés par quelques itérations d’une méthode de descente. Des exemples d’application de cette approche, à des configurations tridimensionnelles et à nombre de Reynolds élevé, peuvent être trouvés dans Duvigneau (2002); Muyl *et al.* (2004).

Les méthodes⁵ de simulation numérique généralement utilisées en Mécanique des Fluides (éléments finis, volumes finis, différences finies) peuvent s'interpréter comme des techniques particulières de réduction de modèles. En effet, elles permettent de transformer un problème initial posé en dimension infinie, en un autre de dimension fini susceptible alors d'une résolution numérique. Cependant, le nombre de degrés de libertés de l'approximation (souvent des millions) est beaucoup trop élevé pour que cette approche soit réellement efficace dans une procédure d'optimisation. Remplacer ces approximations, éventuellement précises mais coûteuses, par d'autres qui ne contiennent que quelques degrés de liberté, constitue donc un enjeu réel du contrôle⁶ d'écoulement.

Finalement, le problème est le suivant : on souhaite déterminer une méthode qui permette, moyennant le prix d'une ou plusieurs résolutions numériques coûteuses, réalisées pour un *modèle* dit *précis*, de faire ensuite et cela pour un coût de calcul équivalent voire inférieur, un grand nombre d'estimations de la même fonction.

Une méthode de réduction de modèles est caractérisée par le choix d'une *base réduite* $\mathbf{u}_i, i = 1, \dots, n$ où le nombre de fonctions de base n est très petit comparé à celui d'une approximation par éléments finis ou au nombre de points d'espace utilisés dans une méthode de différences finies. Les approximations de la fonction sont alors

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$$

où $V_{red} = \text{vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de la base réduite. Les coefficients c_i , qui interviennent dans la combinaison linéaire, sont alors déterminés par projection de Galerkin des équations du système sur V_{red} . Puisque les procédures d'optimisation ou de contrôle sont par nature itératives, on est amené à résoudre les équations du système un grand nombre de fois, ce qui constitue la majeure partie des coûts de calcul. En construisant alors le problème d'optimisation, non plus sur le système précis, mais sur son approximation utilisant le modèle réduit construit sur V_{red} , les coûts numériques associés à chaque itération sont alors extrêmement faibles comparés à ceux obtenus pour le modèle précis. De même, développer un contrôleur par loi de feedback sur le modèle réduit, permettrait de s'approcher du contrôle en temps réel (Atwell et King, 1999; Atwell, 2000).

Finalement, les questions sont les suivantes :

1. comment déterminer une base réduite $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$?
2. quelles sont les contraintes liées à l'utilisation de bases réduites?
3. et finalement, cette démarche est-elle réellement profitable pour résoudre les problèmes liés au contrôle d'écoulement?

Bases réduites

De nombreuses bases réduites existent (Ito et Ravindran, 1998, pour une revue) : base de Lagrange, d'Hermite, de Taylor, de Krylov (Willcox, 2000), bases construites sur la Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (*Proper Orthogonal Decomposition* ou POD),... Dans ce mémoire, nous avons fait le choix d'utiliser pour base réduite d'approximation, une base déterminée par POD, en raison de son optimalité de convergence énergétique. Plus précisément, nous avons retenu un des avatars de la POD, la méthode des Snapshots. Évidemment, ce choix est discutable, d'autres variations de la POD auraient pu être mises en œuvre, comme la "*Balanced POD*" (Rowley, 2004) par exemple. Cependant, la méthode des Snapshots est de loin, la méthode actuellement la plus utilisée en Mécanique des Fluides. Pour cette raison, nous avons porté notre choix sur elle.

Le principe de la méthode des Snapshots est le suivant. Partant de N réalisations de l'écoulement évaluées à des instants différents $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$, on détermine les valeurs et vecteurs propres $\mathbf{w}_i, i = 1, \dots, N$ de la

5. De même, les méthodes $k - \epsilon$ ou de simulations aux grandes échelles, utilisées en Turbulence, peuvent être vues comme des méthodes particulières de réduction de modèles. En effet, on remplace alors les équations de Navier-Stokes par un autre système d'équations qui est, en principe, plus simple à résoudre. De même, pour les équations PSE (*Parabolized Stability Equation*) qui, sous certaines hypothèses, permettent d'étudier les phénomènes de couche limite.

6. Au delà du contrôle d'écoulement, la réduction de modèle peut être pertinente à chaque fois que le coût de calcul joue un rôle prédominant dans l'évaluation d'une fonction. Citons à titre d'exemples, les méthodes de continuation, les études paramétriques, ...

matrice de corrélations des données, puis, on construit une nouvelle base orthonormée par

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^N w_i^j \mathbf{v}_j$$

où w_i^j est la $j^{\text{ème}}$ composante du $i^{\text{ème}}$ vecteur propre \mathbf{w}_i . Par construction, les vecteurs propres $V_{POD} = \{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N\}$ sont rangés dans l'ordre décroissant en fonction de l'amplitude de la valeur propre associée. Si la décroissance des valeurs propres est suffisamment rapide, alors on peut choisir un sous-espace $\{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n\}$ de V_{POD} comme espace V_{red} sur lequel réaliser la projection. Pour que la base soit effectivement réduite, il faut que $n \ll N$. Par contre, le nombre de réalisations N n'a pas à être nécessairement petit. Au contraire, comme il sera discuté ci-dessous, c'est le seul paramètre sur lequel on peut jouer dans la construction du modèle réduit.

Modèle réduit et contrôle d'écoulement

Les gains attendus par les approches par réduction de modèle reposent sur l'hypothèse qu'une réduction est *a priori* possible. Or, d'un point de vue de la théorie de l'information, la POD s'interprète comme une méthode qui supprime l'information redondante contenue dans l'ensemble des réalisations de la base de données utilisée pour construire la base réduite. Par conséquent, si toutes les réalisations de la base sont prises linéairement indépendantes, alors il n'y a aucun espoir de réduction⁷ de modèles, les éléments de l'espace V_{red} étant confondus avec les vecteurs propres de la POD, eux mêmes confondus avec les réalisations de la base de données. La base POD est donc incapable de représenter une information qui n'était pas contenue initialement dans la base de données utilisée pour la déterminer. A moins de prendre des précautions particulières, il est donc fortement improbable d'espérer utiliser une base réduite déterminée pour un écoulement non contrôlé, pour rechercher à résoudre un problème de contrôle d'écoulement. Effectivement, Prabhu *et al.* (2001) ont mis numériquement en évidence pour un écoulement de canal, que la base POD, attachée à une configuration contrôlée de l'écoulement, était fortement altérée en comparaison avec la base POD de l'écoulement non contrôlé. Cela interdisait même tout espoir d'utiliser la base POD, déterminée en écoulement non contrôlé, pour déterminer une stratégie de contrôle.

Une condition, nécessaire (mais pas suffisante), d'utilisation de modèles réduits construits par POD en contrôle d'écoulements repose donc sur la génération d'une "bonne" base de données. Idéalement, on aimerait construire une base de données qui contienne toute l'information nécessaire à la résolution ultérieure d'un problème d'optimisation par modèle réduit. A défaut, on souhaiterait que cette base de données contienne autant d'information que possible. Mais le problème n'est pas simple. Pour s'en convaincre, considérons un problème d'optimisation quelconque posé dans l'espace des paramètres (figure 2(a)). En supposant connu le chemin qui mène à l'optimum avec le modèle précis, la construction de la base de données POD serait facile à réaliser, il suffirait pour cela de considérer des réalisations de l'espace des paramètres situées "suffisamment proches" du chemin vers l'optimum (figure 2(b)). Chacun des états successifs du processus d'optimisation pouvant alors être décrits par la base réduite, il existerait des garanties importantes pour que le modèle réduit construit sur V_{red} soit utilisable pour déterminer l'optimum. Gunzburger (2000) explique d'ailleurs de cette manière les succès rencontrés jusqu'alors par l'utilisation de modèles réduits de dynamique pour optimiser des écoulements. La difficulté pratique est que ce chemin n'est naturellement pas connu. Sans autre information sur le système à optimiser (et en particulier sur la valeur des paramètres optimaux que l'on recherche), il y a de forte probabilité qu'en prenant "au hasard" les réalisations de la base de données, celles-ci ne soient d'aucune utilité pour résoudre le processus d'optimisation (figures 2(c) et 2(d)).

Dans ces conditions, comment procéder pour choisir "au mieux" les réalisations à utiliser pour construire la base réduite? A l'heure actuelle, il n'existe pour ainsi dire pas⁸ de méthode systématique, rationnelle et efficace pour générer ces réalisations. Une façon de procéder consiste à exciter l'écoulement de manière *ad-hoc* afin de construire des réalisations qui possèdent la dynamique la plus "riche" possible. Cette méthode est mise

7. Le seul critère à notre disposition pour tester si une réduction de modèle est envisageable est un critère *a posteriori* sur la vitesse de décroissance des valeurs propres. Plus elle est rapide, et plus il y aura d'informations redondantes dans la base de données.

8. Une méthode couplant *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) et *Centroidal Voronoi Tessellation* (CVT) a récemment été proposée par Gunzburger (Burkardt *et al.*, 2004) pour déterminer de manière "intelligente" les réalisations à introduire dans la base de données POD (une discussion plus complète est reportée à la section des perspectives).

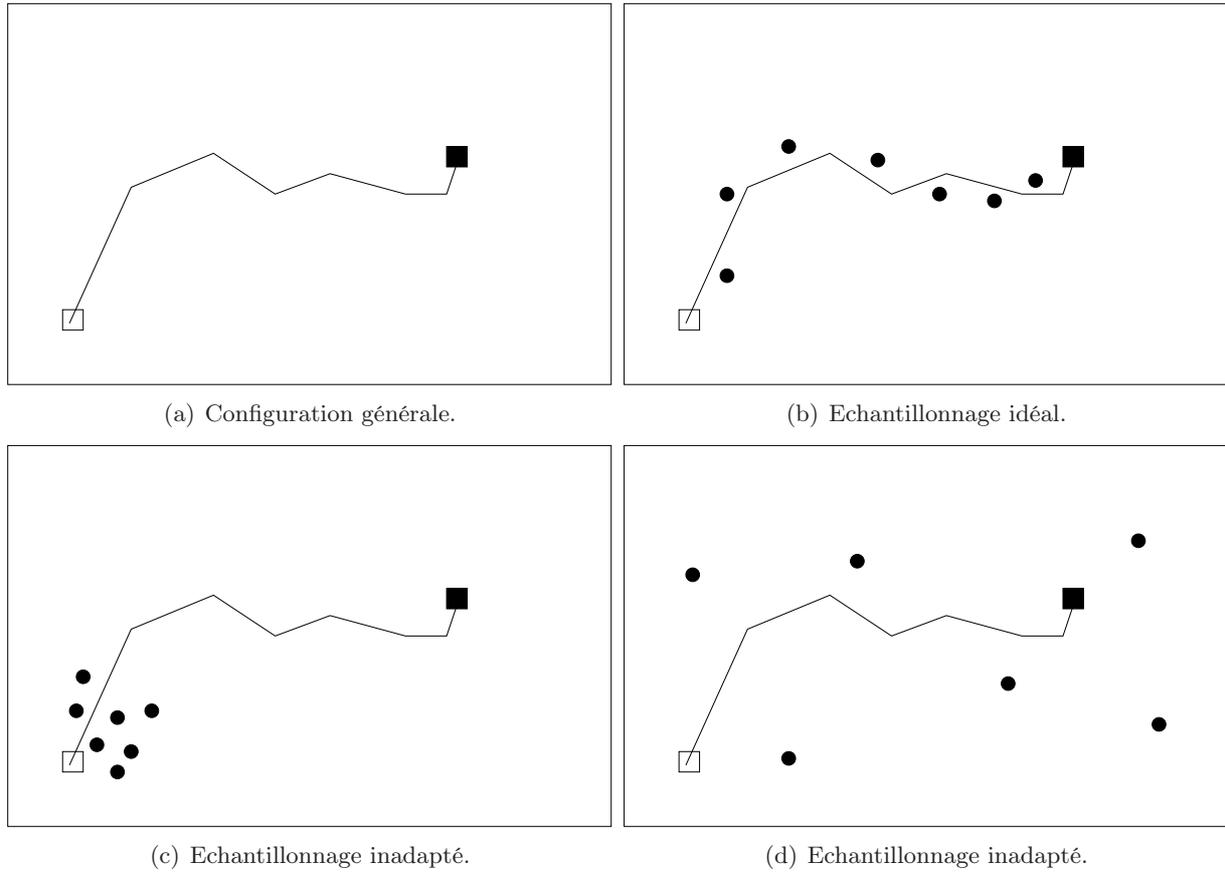


FIGURE 2 – Représentation schématique d'un problème d'optimisation dans l'espace des paramètres de contrôle. — chemin d'optimisation, conditions initiale \square et terminale \blacksquare du processus d'optimisation, \bullet réalisation utilisée pour la base de données.

en œuvre avec un certain succès au chapitre 5. L'inconvénient est que la construction de la base de données ne repose sur aucune base théorique sérieuse. Une autre méthode consiste à utiliser une méthode adaptative par laquelle on construit pas à pas la solution optimale dans l'espace des paramètres de contrôle (figure 3). Ainsi, les contraintes sur la détermination des réalisations ne sont plus aussi fortes que précédemment car chaque base réduite ne doit plus représenter qu'une zone limitée de l'espace des paramètres. L'inconvénient est qu'il faut alors déterminer le moment où la base réduite n'est plus en mesure de représenter correctement le modèle précis. Dans ce mémoire, deux types de critère seront successivement utilisés aux chapitres 6 et 7 pour prendre en compte cette difficulté.

Positionnement du problème

Ce mémoire est une réflexion autour de l'apport des modèles réduits de dynamique construits par Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (*Proper Orthogonal Decomposition* ou POD) au contrôle actif d'écoulement de nature aérodynamique. L'objectif est de développer pour une configuration modèle, une méthodologie de contrôle d'écoulement pouvant être utilisée par la suite pour contrôler idéalement *en temps réel* un écoulement quelconque. Jusqu'à maintenant, deux types d'approche d'optimisation numérique existent :

- d'un côté, l'optimisation paramétrique comme nous l'avons réalisé à l'annexe A et dans Bergmann (2004),
- de l'autre, la résolution par contrôle optimal ou sous-optimal avec utilisation des équations de Navier-Stokes comme équations d'état (Min et Choi, 1999; Protas, 2000; Bewley *et al.*, 2001; Homescu *et al.*, 2002, par exemple).

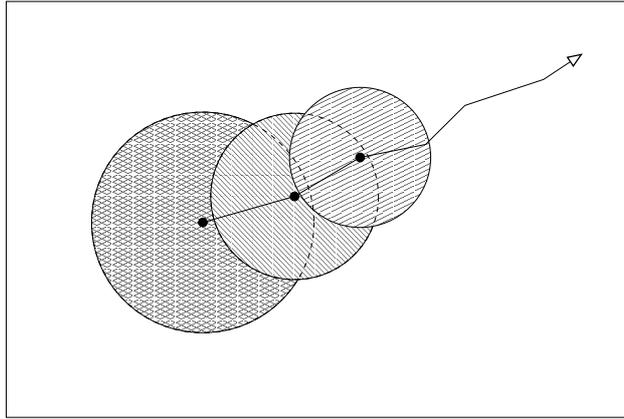


FIGURE 3 – Représentation schématique de l'optimisation par méthode adaptative et région de confiance.

L'inconvénient de ces deux approches est qu'elles nécessitent des coûts de calcul tellement importants qu'elles en deviennent inefficaces pour résoudre des problèmes d'écoulement en situations complexes. Afin de réduire ces coûts de calcul, ce mémoire se propose de coupler une résolution du problème d'optimisation par contrôle optimal, à une modélisation de la dynamique contrôlée de l'écoulement par modèle réduit construit par POD.

Configuration de l'étude

Dans ce mémoire, nous cherchons à contrôler⁹ le sillage instationnaire existant en aval d'un cylindre circulaire (figure 4). L'écoulement est considéré comme incompressible et le fluide est supposé visqueux et Newtonien. L'intérêt de cette configuration d'écoulement est multiple. D'un côté, c'est un écoulement suffisamment simple pour pouvoir être étudiée numériquement à un coût raisonnable. De l'autre, c'est une configuration représentative des écoulements décollés¹⁰ existant dans de nombreuses applications industrielles. Enfin¹¹, le sillage du cylindre est très bien documenté, de nombreux résultats expérimentaux et numériques existant et cela même pour l'écoulement manipulé.

La dynamique d'un écoulement de sillage est caractérisée (Williamson, 1996; Zdravkovich, 1997) par son nombre de Reynolds Re défini comme

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$$

où U_∞ est la vitesse à l'infini amont du cylindre, D son diamètre et ν , la viscosité cinématique du fluide.

Par ailleurs, pour des raisons de simplicité de mise en œuvre numérique (voir chapitre 1), ce mémoire est limité à des configurations bidimensionnelles et l'étude est réalisée pour $Re = 200$, soit une valeur du nombre de Reynolds qui correspond à la limite haute du sillage laminaire (Zdravkovich, 1997, par exemple). Les écoulements de sillage devenant tridimensionnels pour $Re \simeq 190$ (Williamson, 1996), il ne serait donc pas légitime, en toute rigueur, d'espérer décrire la dynamique du cylindre contrôlé à l'aide d'une approche numérique bidimensionnelle. Cependant, il est également généralement admis que les phénomènes bidimensionnels jouent encore un rôle majeur au delà de $Re = 190$ ce qui permet de justifier notre approche. Précisons enfin, pour être tout à fait clair, qu'une des ambitions de ce mémoire est de présenter des méthodes de contrôle

9. Nous utiliserons systématiquement le verbe "contrôler" pour parler d'un "forçage" de l'écoulement associé à une réduction optimale d'un critère quelconque (l'instationnarité du sillage ou le coefficient de traînée moyen par exemple). Dans le cas contraire, quand le forçage est introduit a priori, comme au chapitre A, nous parlerons de "manipulation" ou encore, comme cela a déjà été fait, de forçage.

10. En tant que tel, ce travail est en lien direct avec le Groupe De Recherche Contrôle Des Décollements animé par A. Kourta (IMFT).

11. ce qui ne constitue pas le moindre des avantages étant donnée l'originalité de l'approche retenue dans ces travaux !

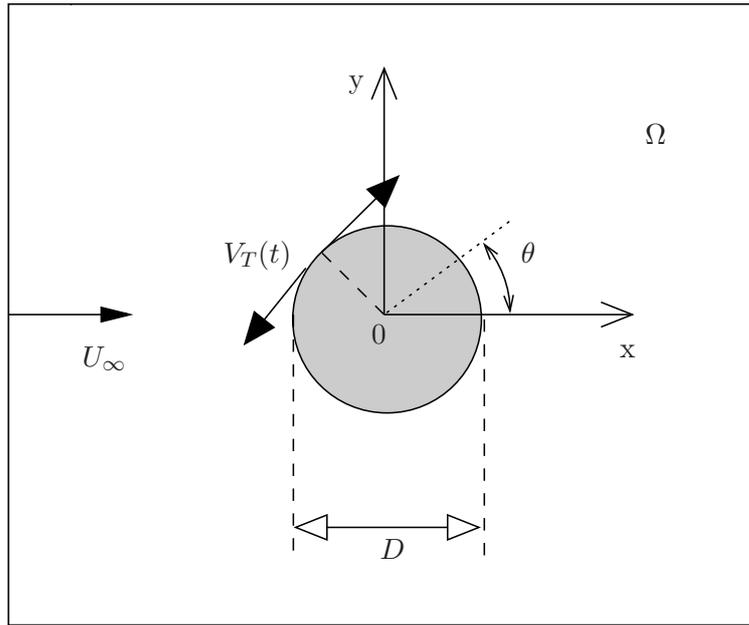


FIGURE 4 – Représentation schématique de notre configuration d'écoulement contrôlé modèle.

d'écoulement s'étendant aisément à des situations pour lesquelles interviennent à la fois des effets tridimensionnels et des grands nombres de Reynolds, conditions représentatives des cas industriels qui nous intéressent *in fine*.

Dans le régime laminaire du sillage, les grandeurs caractéristiques de l'écoulement (vitesse, coefficients aérodynamiques, ...) présentent un comportement périodique en temps que l'on peut caractériser par sa fréquence f ou, plus généralement, par son nombre de Strouhal St défini comme $St = \frac{fD}{U_\infty}$. Par la suite, à chaque fois qu'il y a risque de confusion, on notera pour différencier les nombres de Strouhal, St_n , le nombre de Strouhal dit *naturel*, correspondant à un écoulement non contrôlé.

Plusieurs types de contrôle peuvent *a priori* être envisagés, contrôle par soufflage / aspiration à la paroi (Li *et al.*, 2003), chauffage du cylindre, application d'un champ magnétique extérieur, Par la suite, le contrôle de l'écoulement est exercé par rotation instationnaire¹² du cylindre autour de sa génératrice. Différents paramètres de contrôle sont alors possibles, tous équivalents en pratique. Soient R le rayon du cylindre, et $\dot{\theta}$ le taux de rotation instantané de celui-ci (voir figure 4), on peut convenir d'imposer simplement $\dot{\theta}$ (Protas, 2000; He *et al.*, 2000; Protas et Wesfreid, 2002). Mais, il est également possible d'imposer la vitesse tangentielle du cylindre $V_T(t) = R\dot{\theta}$ ou, de manière plus fréquente (Tokumar et Dimotakis, 1991; Homescu *et al.*, 2002), un taux adimensionnel de rotation $\gamma(t)$ construit comme le rapport de la vitesse tangentielle du cylindre sur la vitesse à l'infini amont :

$$\gamma(t) = \frac{V_T(t)}{U_\infty} = \frac{R\dot{\theta}}{U_\infty}$$

Dans notre cas (voir chapitre 1), nous considérerons $U_\infty = 1$. Le taux adimensionnel de rotation $\gamma(t)$ sera donc tout simplement confondu avec la vitesse tangentielle du cylindre $V_T(t)$. Pour $\gamma = 0$, l'écoulement sera dit non contrôlé.

Le reste du mémoire est consacré à la détermination d'une loi de contrôle $\gamma(t)$ permettant de minimiser la traînée aérodynamique du cylindre. Bien que l'optimisation multicritère (minimisation de la traînée pour une portance maximale, par exemple) soit un problème scientifique et industriel majeur, seule l'optimisation monocritère sera abordée par la suite.

12. On exclut en cela les contrôles à taux de rotation constant $\dot{\theta} = \text{cte}$ comme dans Kang *et al.* (1999).

Exceptée à la section 5.3 où, dans une première approche, la fonction de contrôle $\gamma(t)$ n'est pas recherchée sous une forme particulière, dans tout le reste du mémoire, le contrôle est considéré comme harmonique *i.e.* s'écrivant :

$$\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t)$$

où A et St_f sont respectivement l'amplitude et le nombre de Strouhal de *forçage*. Le problème de contrôle abordé par la suite sera donc à deux degrés de liberté.

Organisation du document

Ce mémoire est constitué, outre ce chapitre introductif et la conclusion générale, de 7 chapitres principaux et 5 annexes. Il est organisé de la manière suivante :

Le chapitre 1 est consacré à la présentation et validation de l'outil numérique utilisé pour cette étude.

Le chapitre 2 formule les problèmes de contrôle d'écoulement comme des problèmes d'optimisation que l'on peut résoudre, selon la dynamique de l'écoulement, soit par des méthodes initialement développées dans le cadre de l'automatique, contrôle optimal et robuste sur \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ , soit par une approche type contrôle optimal, initialement développée par des mathématiciens appliqués.

Le chapitre 3 présente de manière détaillée la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres qui est utilisée tout le long de ce mémoire pour construire la base réduite. La POD est d'abord introduite dans le cadre général des méthodes d'approximation en insistant tout particulièrement sur ses liens étroits avec la Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD). Dans un second temps, la POD est présentée dans le cadre historique de la Turbulence comme une méthode d'extraction de *structure cohérente*. Enfin, les différentes approches de la POD sont discutées en détaillant les deux méthodes les plus utilisées, la méthode classique et la méthode des Snapshots.

Dans un premier temps, le chapitre 4 décrit comment construire un modèle réduit de dynamique par projection de Galerkin du système Navier-Stokes sur les fonctions propres POD. Une attention particulière est apportée sur la prise en compte des conditions aux limites et sur l'introduction explicite des paramètres de contrôle dans le système réduit. Une première application de ce formalisme est alors réalisée sur le cylindre non contrôlé, puis manipulé. Une méthode de stabilisation est ensuite introduite permettant de prendre en compte de manière implicite, via des viscosités artificielles calculées de manière optimale pour chacun des modes POD, les modes d'ordre élevé négligés dans la troncature Galerkin. Finalement, le système réduit, ainsi stabilisé, est utilisé avec succès dans une analyse de stabilité linéaire pour étudier les deux premières bifurcations de l'écoulement.

Dans le chapitre 5, la théorie du contrôle optimal est appliquée en utilisant le modèle réduit POD comme équation d'état. Dans ce chapitre, la base POD n'est pas réactualisée au cours du processus d'optimisation. Les réalisations de l'écoulement, utilisées pour construire celle-ci, sont donc évaluées à partir d'une excitation ad-hoc, choisie pour que l'ensemble de la dynamique contrôlée du système soit *a priori* prise en compte. Enfin, la base POD ne représentant pour l'instant que les champs de vitesse, c'est l'énergie instationnaire contenue dans le sillage que l'on cherche à minimiser par contrôle.

Dans le chapitre 6, nous avons d'abord construit une base POD pour la pression afin de pouvoir considérer directement comme fonction objectif le coefficient de traînée moyen. Par la suite, un travail spécifique a été réalisé pour améliorer le domaine de représentativité de la fonction objectif modèle. L'approche la plus efficace a consisté à ajouter à la base POD initialement construite de nouveaux modes, dits modes de non équilibre. Ainsi, la robustesse de la fonction objectif a considérablement été améliorée. Cependant, il a été jugé utile d'introduire un renouvellement régulier du modèle réduit au cours de la phase d'optimisation. La difficulté principale de ce type de méthode adaptative consiste à déterminer quand il devient nécessaire de faire une nouvelle résolution du système Navier-Stokes pour rafraîchir la base POD. Une première approche n'ayant pas permis de converger, nous avons été obligé de restreindre de manière empirique le domaine de validité de la fonction objectif modèle pour obtenir de premiers résultats encourageants.

Finalement, le chapitre 7 se propose d'apporter des solutions aux problèmes de convergence et d'empirisme précédemment rencontrés. La méthode consiste à utiliser un algorithme dénommé TRPOD pour *Trust Region POD* qui couple méthode d'optimisation à régions de confiance et modèles réduits POD. Le principal avantage de cette approche est que le rayon de la zone de confiance du modèle réduit de dynamique n'a plus à être fixé par l'utilisateur, mais est automatiquement évalué au cours du processus d'optimisation. Par ailleurs, on peut montrer que la solution obtenue pour le problème d'optimisation, posé sur le modèle réduit de dynamique, converge effectivement vers la solution du problème défini par le modèle précis de dynamique.

