

## Chapitre 2

# Estimation, contrôle optimal et contrôle robuste

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>41</b>
<b>2.2</b>	<b>Contrôle d'écoulement et optimisation sous contraintes</b>	<b>43</b>
2.2.1	Formulation du problème	43
2.2.2	Discussion sur la fonctionnelle objectif: régularisation du problème d'optimisation	44
<b>2.3</b>	<b>Contrôle linéaire par feedback dans l'espace des états</b>	<b>45</b>
2.3.1	Contexte de la théorie du contrôle linéaire	46
2.3.2	Théorie du contrôle sur $\mathcal{H}_2$	47
2.3.3	Théorie du contrôle robuste sur $\mathcal{H}_\infty$	53
2.3.4	Application à l'équation de la chaleur	55
<b>2.4</b>	<b>Optimisation non linéaire</b>	<b>57</b>
2.4.1	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	58
2.4.2	Approche du gradient par les sensibilités	61
2.4.3	Approche du gradient par l'équation adjointe	62
2.4.4	Résolution numérique: commutativité des étapes de discrétisation et de différentiation	63
<b>2.5</b>	<b>Un problème modèle: l'équation de Burgers</b>	<b>65</b>
2.5.1	Définition du problème d'optimisation	65
2.5.2	Résolution du problème d'optimisation	66
2.5.3	Résultats numériques	71

---

## 2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre n'est pas de décrire de manière exhaustive les méthodes d'estimation, de contrôle optimal et de contrôle robuste tant la bibliographie est importante et les approches souvent différentes selon la communauté (automaticien, mathématicien appliqué, ...) abordant le sujet. Plus humblement, nous souhaitons présenter quelques idées essentielles, susceptibles de faciliter la résolution d'un problème de contrôle d'écoulement. Par ailleurs, nous ne prétendons pas à une pleine et entière rigueur<sup>1</sup> mathématique, en particulier, les espaces fonctionnels ne seront que rarement introduits. Les lecteurs intéressés par des compléments mathématiques pourront se référer aux ouvrages publiés par Borggaard *et al.* (1994); Gunzburger (1995); Sritharan (1998) et aux articles de Fattorini et Sritharan (1992); Bewley *et al.* (2000a,b) pour des résultats d'existence et d'unicité de solutions concernant les problèmes de contrôle optimal pour les équations de

---

1. Cependant, notre objectif est d'utiliser le plus rigoureusement possible des outils mathématiques en vue de résoudre un problème d'ingénieurs.

Navier-Stokes.

D'une manière générale, un système dynamique à contrôler (un écoulement par exemple) est un processus comprenant des entrées et des sorties. Les entrées du système (les commandes<sup>2</sup>) sont choisies de manière à optimiser un certain critère de performance<sup>3</sup>. Les sorties correspondent à des observations qui sont utilisées via un contrôleur pour déterminer en temps réel la commande à exercer. Des difficultés pratiques supplémentaires viennent du fait que les observations peuvent être bruitées ou partielles, ne permettant pas de déterminer exactement l'état du système, et que le système lui-même peut être perturbé ou connu de manière imparfaite.

En Mécanique des Fluides, ce problème est généralement abordé par des méthodes distinctes, provenant respectivement de l'automatique et des mathématiques appliquées, selon que le système dynamique décrivant l'état du système en fonction de la commande puisse être considéré comme linéaire ou non.

Le premier cas concerne principalement les études sur le retardement<sup>4</sup> de la transition à la turbulence d'un écoulement laminaire. En effet, au lieu de chercher à contrôler un écoulement instable, il est souvent plus judicieux (et surtout plus économique) de l'empêcher de se déstabiliser. Les équations de Navier-Stokes étant alors linéarisables, il est possible d'utiliser des méthodes de contrôle linéaire par feedback dans l'espace des états (voir §2.3) développées à l'origine par les automaticiens dans le cadre de la théorie du contrôle. C'est précisément l'approche qui a été suivie avec succès par Bewley pour contrôler un écoulement de Poiseuille (Bewley et Agarwal, 1996; Bewley et Liu, 1998 et Mckerman *et al.*, 2003). Beaucoup plus récemment, deux groupes se sont intéressés à l'utilisation de ce type de méthodes pour contrôler des écoulements en développement spatial. Ainsi, Buchot *et al.* (2003) ont réussi à supprimer<sup>5</sup> numériquement, par application de la méthode LQR présentée à la section 2.3.2.1, les allées de Von Kármán en aval d'un cylindre circulaire. Lauga et Bewley (2002, 2003, 2004) ont considéré la même configuration d'écoulement mais en la modélisant par une équation de Ginzburg Landau complexe.

Le second cas concerne le contrôle des écoulements en régime turbulent. L'hypothèse de linéarité n'est évidemment plus valable et il n'est donc plus possible d'utiliser des approches linéaires pour déterminer une loi de contrôle. Par contre, il est toujours possible de formuler<sup>6</sup> ce problème de contrôle d'écoulement comme un problème d'optimisation et de faire appel aux méthodes d'optimisation non linéaires pour le résoudre (voir §2.4). Cette approche a été suivie, en particulier, par Bewley *et al.* (2001) pour contrôler par simulation numérique directe un écoulement de canal turbulent et, plus récemment, par He *et al.* (2000) et Protas et Styczek (2002) pour contrôler le sillage d'un cylindre en régime laminaire. Puisque l'objet de ce mémoire est de développer des méthodologies de contrôle pouvant *in fine* être mises en œuvre pour contrôler un écoulement en régime turbulent, nous utiliserons exclusivement le contrôle optimal dans les chapitres 5, 6 et 7 en considérant que la dynamique du système contrôlé est représentée par le modèle d'ordre réduit basé sur la POD développé au chapitre 4. Le lecteur trouvera à l'annexe D, le système optimal associé à la minimisation, par rotation, de la traînée du cylindre lorsque le modèle de Navier-Stokes est utilisé comme équations d'état.

2. Pour un système physique modélisé par un système d'équations aux dérivées partielles (EDP), ces commandes pourront être une condition initiale, des conditions aux limites, des coefficients du système d'EDP. On verra au chapitre 4 que pour le cylindre contrôlé étudié dans ce mémoire, le contrôle est introduit via un terme de frontière.

3. La performance d'une solution est souvent évaluée par un critère énergétique car on est alors assuré que le processus de minimisation conduit à un contrôleur stable et suffisamment robuste. Par ailleurs, on est légitimement intéressé par les solutions qui minimisent l'énergie du signal de commande.

4. Lorsque l'on sait que la traînée visqueuse se révèle être bien plus importante dans une couche limite turbulente que laminaire (jusqu'à 90% plus forte selon Joslin 1998, on comprend aisément l'objectif de la majorité des stratégies de contrôle d'écoulements : retarder la transition vers la turbulence de l'écoulement laminaire.

5. Les résultats de cette étude sont limités au régime laminaire de l'écoulement (nombre de Reynolds compris entre 60 et 85). Dans cet intervalle de nombre de Reynolds, le modèle linéaire d'écoulement qu'ils utilisent est alors légitime. Toutefois, les auteurs font remarquer, qu'une stabilisation de l'écoulement par feedback, ne pourra être utilisée numériquement pour des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds, qu'à condition de réduire la dimension de l'opérateur de feedback par une approche de type POD similaire à celle utilisée par Atwell (2000).

6. Naturellement, formuler un problème de contrôle d'écoulement comme un problème d'optimisation est toujours possible (Gunzburger, 1997a) que le système dynamique modélisant le processus physique soit linéaire ou non. Citons par exemple les travaux présentés par Walther (2001) dans lesquels il a été fait appel à la méthode du contrôle optimal pour contrôler et amortir des perturbations de couche limite de type ondes planes de Tollmien-Schlichting décrites par la technique PSE (*Parabolized Stability Equations*).

La section 2.2 définit le cadre mathématique dans lequel peut être posé le contrôle d'écoulement comme un problème général d'optimisation sous contraintes. En effet, que la loi de contrôle soit recherchée par contrôle linéaire par feedback dans l'espace des états comme à la section 2.3 ou directement comme solution d'un problème d'optimisation non linéaire comme à la section 2.4, le cœur de la méthode est constitué par l'optimisation d'une fonctionnelle donnée, sous contraintes de respect des équations du système dynamique. A la section 2.2.2, le choix de la fonctionnelle objectif est ensuite discutée en insistant sur la limitation du coût lié au contrôle afin que le problème d'optimisation soit bien posé. La section 2.3 présente des méthodes type feedback pour contrôler et amortir des perturbations extérieures susceptibles de déstabiliser le système. Lorsque ce type de méthodes n'est plus applicable, *i.e.* quand l'écoulement est trop instable ou quand les contrôleurs mis en jeu ne sont pas assez efficaces, il faut user de stratégies différentes. Pour cela, des méthodes de résolution adaptées aux problèmes d'optimisation non linéaire sont présentées à la section 2.4. Enfin, la détermination d'un système optimal est illustrée à la section 2.5 sur un problème modèle constitué par les équations de Burgers monodimensionnelles.

## 2.2 Contrôle d'écoulement et optimisation sous contraintes

L'objet de cette section est de montrer qu'un problème de contrôle d'écoulement posé physiquement peut être reformulé, moyennant l'introduction d'un certain formalisme, dans un cadre unifié permettant l'utilisation ultérieure de méthodes de résolution issues de la théorie du contrôle ou de l'optimisation non linéaire.

### 2.2.1 Formulation du problème

Tout problème de contrôle d'écoulement (optimisation de forme, contrôle actif) peut être décrit mathématiquement par les quantités suivantes (Gunzburger, 1997a) :

1. *Des variables d'état*  $\phi$  qui définissent les grandeurs caractéristiques du problème. Selon le cas, il pourra s'agir d'un champ de vitesse, de pression, de température ...
2. *Des paramètres de contrôle*  $c$ . En pratique, selon que le contrôle soit aux frontières ou distribué, ces variables apparaîtront soit comme conditions initiales ou aux limites du problème, soit directement comme terme source dans les équations d'état. Selon le cas, il pourra s'agir d'un champ de vitesse (soufflage-aspiration de fluide) ou d'un flux de température en paroi, ou encore pour un problème d'optimisation de forme (Mohammadi et Pironneau, 2001), ce seront des variables permettant de décrire la forme des frontières du domaine.
3. *Une fonctionnelle coût ou objectif*  $\mathcal{J}$  qui définit les objectifs que l'on souhaite atteindre. Il pourra s'agir d'amortir des perturbations en un temps minimal, de minimiser une traînée ou maximiser une portance ou un flux de chaleur, de stabiliser une température, de retarder le décollement d'une couche limite ou d'approcher l'écoulement d'un écoulement désiré ... Cette fonctionnelle  $\mathcal{J}$  est une fonction explicite des variables d'état  $\phi$  ( $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\phi)$ ) et peut également dépendre des paramètres de contrôle  $c$  (voir discussion § 2.2.2).
4. *Des contraintes physiques* ( $\mathcal{F}$ ) du problème qui traduisent l'évolution des variables d'état  $\phi$  en fonction<sup>7</sup> des paramètres de contrôle  $c$  en respectant les lois de la physique. Mathématiquement, on note ces contraintes :

$$F(\phi, c) = 0. \quad (2.1)$$

En Mécanique des Fluides, elles représentent généralement les équations de Navier-Stokes munies de leurs conditions initiales et aux limites. On verra à la section 2.2.2 qu'une contrainte supplémentaire, traduisant la limitation du coût lié au contrôle, peut éventuellement leurs être rajoutées.

Toutes les quantités physiques étant maintenant définies mathématiquement, le **problème d'optimisation sous contraintes**, lié à tout problème de contrôle d'écoulement peut donc s'énoncer de la manière

<sup>7</sup> Les variables d'état  $\phi$  dépendant implicitement des variables de contrôle  $c$  par les contraintes ( $\mathcal{F}$ ), il faudrait en toute rigueur écrire les variables d'état  $\phi(c)$ . Cependant, pour alléger les notations, elles seront notées par la suite uniquement  $\phi$ .

suivante :

*Déterminer les variables d'état  $\phi$  et les paramètres de contrôle  $c$ , tels que la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$  soit optimale (minimale ou maximale selon le cas) sous les contraintes  $\mathcal{F}$ .*

## 2.2.2 Discussion sur la fonctionnelle objectif : régularisation du problème d'optimisation

Le choix de la fonctionnelle coût  $\mathcal{J}$  est central dans un problème d'optimisation. D'un point de vue mathématique, la grandeur physique à optimiser est représentée à l'aide d'une mesure  $\mathcal{M}$  de celle-ci par :

$$\mathcal{J} = \mathcal{M}$$

où  $\mathcal{M}$  peut représenter une traînée, une portance, l'énergie d'une perturbation, ... Le choix de cette fonctionnelle, si il peut s'avérer difficile à réaliser, est essentiel en pratique pour que le problème d'optimisation soit bien posé. Par ailleurs, au delà de la difficulté mathématique, il s'agit de l'unique quantité où il est possible de "faire intervenir un peu de physique" dans le problème.

Dans le cas général, la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  ne dépend pas explicitement des paramètres de contrôle  $c$ . Le problème d'optimisation peut alors être mal posé car il est possible d'obtenir un contrôle optimal qui, bien que minimisant la fonctionnelle objectif, serait non borné. La mise en œuvre pratique d'un contrôle non borné n'est d'ailleurs pas envisageable car les coûts économiques qui lui sont liés seraient infinis. Pour éviter cette difficulté, on régularise le problème d'optimisation en s'arrangeant pour limiter le coût lié au contrôle. Soit  $\mathcal{J}_c$  ce coût, la limitation envisagée peut être réalisée de deux manières :

### 1. En ajoutant une contrainte supplémentaire aux contraintes physiques ( $\mathcal{F}$ )

Le principe consiste à ajouter aux contraintes physiques ( $\mathcal{F}$ ), une contrainte supplémentaire traduisant un seuil à ne pas dépasser pour le coût lié au contrôle. Soit  $\mathcal{S} > 0$  cette valeur de seuil, on impose donc la contrainte d'inégalité  $\mathcal{J}_c \leq \mathcal{S}$ . En optimisation, les contraintes d'inégalité font apparaître les conditions d'optimalité dites de Karush-Kuhn-Tucker (Bonnans *et al.*, 2003) qui sont souvent délicates à prendre en compte. Par conséquent, on préfère généralement retenir des contraintes de type égalité que l'on peut assez facilement imposer via des multiplicateurs de Lagrange (§ 2.4.1). Soit  $\mathcal{S}_u > 0$ , un coût fixé par l'utilisateur, on impose comme contrainte supplémentaire au système (2.1),  $\mathcal{J}_c = \mathcal{S}_u$ , sans que la nature de celui-ci soit alors changée.

### 2. En modifiant la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$

Il est également possible de faire dépendre explicitement la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$  des paramètres de contrôle  $c$  en modifiant celle-ci en :

$$\mathcal{J} = \mathcal{M} + \beta \mathcal{J}_c.$$

La conséquence principale est que l'on ne recherche plus à optimiser la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  mais le couple  $(\mathcal{M}, \mathcal{J}_c)$ . Le paramètre  $\beta \geq 0$  est laissé au choix de l'utilisateur suivant l'importance qu'il souhaite donner au coût lié au contrôle. Si la valeur de  $\beta$  est "faible" alors le coût lié au contrôle n'est pas une priorité dans sa mise en œuvre pratique, et dans ce cas, on parle de *régularisation* de la fonctionnelle objectif. Si la valeur de  $\beta$  est "élevée", le coût lié au contrôle est une priorité et on parle de *pénalisation* de la fonctionnelle objectif.

En pratique (voir sections 2.3 et 2.4 ainsi qu'au chapitre 4), le coût lié au contrôle est limité en modifiant la fonctionnelle objectif. En effet, cette méthode fait intervenir de manière naturelle via le paramètre  $\beta$  un compromis entre l'objectif à atteindre et les moyens mis à disposition pour y parvenir. Par ailleurs, cette méthode ne fait pas introduire<sup>8</sup> de relation supplémentaire au système de contraintes physiques ( $\mathcal{F}$ ) facilitant ainsi la formulation du problème.

---

8. En ajoutant une contrainte d'égalité au système des contraintes physiques ( $\mathcal{F}$ ), il y a introduction par application de la méthode des multiplicateurs de Lagrange (§ 2.4.1) d'une inconnue adjointe supplémentaire dans le système optimal.

Le contrôle d'écoulement est maintenant bien posé sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. Nous allons donc présenter successivement les deux principales méthodes de résolution que l'on rencontre dans la littérature du contrôle d'écoulement. A la section suivante, les méthodes de contrôle linéaire par feedback dans l'espace des états, puis à la section 2.4 les méthodes d'optimisation non linéaire.

## 2.3 Contrôle linéaire par feedback dans l'espace des états

Une approche classique du contrôle d'écoulement consiste à développer des méthodes qui permettent de retarder voire d'éliminer la transition de l'écoulement du régime laminaire au régime turbulent. On cherche alors à déterminer une loi de contrôle qui amortisse le plus rapidement possible les perturbations susceptibles de déstabiliser l'écoulement. Dans le cas d'une couche limite laminaire, cela revient à introduire un forçage contrôlé en paroi (soufflage/aspiration le plus souvent) tel que la croissance des perturbations de type ondes planes de Tollmien-Schlichting ne puisse se produire (Joslin *et al.*, 1995, par exemple). Dans le cadre d'une approche faiblement non-parallèle de la stabilité de couche limite, ces perturbations sont bien décrites par la technique des Equations de Stabilité Parabolisées (Airiau, 1994). Le contrôle à exercer peut alors être recherché par contrôle optimal en essayant de déterminer le forçage qui minimise l'énergie de perturbation à la fin du domaine d'étude (Walther, 2001). Mais le plus souvent en Mécanique des Fluides (Bewley et Agarwal, 1996; Bewley et Liu, 1998; Bewley, 2001; Aamo et Fossen, 2002; Mckerman *et al.*, 2003), la théorie locale<sup>9</sup> est utilisée pour décrire les perturbations de couche limite. Après discrétisation du problème en temps et en espace, on aboutit à un modèle linéaire du type<sup>10</sup> :

$$\dot{\phi} = A\phi + Bc \quad (2.2a)$$

$$\psi_m = C\phi + Dc \quad (2.2b)$$

Dans ce modèle, encore appelé système dans l'espace des états ou encore *Plant* dans la terminologie anglo-saxonne (noté  $\mathcal{P}$  par la suite), on considère que les variables d'état  $\phi \in \mathbb{R}^n$  et que les variables de contrôle  $c \in \mathbb{R}^p$ . Quant aux variables  $\psi_m \in \mathbb{R}^m$ , elles représentent les mesures réalisées sur le système à contrôler. On verra à la section 2.3.1 que ces mesures<sup>11</sup>, encore appelées *observables*, peuvent être bruitées et éventuellement en nombre très limité. Les matrices  $A, B, C, D$ , définissant le système dans l'espace des états, sont des matrices réelles de dimension respective  $n \times n$ ,  $n \times p$ ,  $m \times n$  et  $m \times p$ . Enfin, si le système dynamique à contrôler possède une entrée ( $m = 1$ ) et une sortie ( $p = 1$ ) celui-ci est appelé SISO (*Single Input Single Output*), sinon il est dit MIMO (*Multiple Input Multiple Output*).

L'intérêt du système (2.2), en terme de contrôle d'écoulement, est qu'il correspond précisément à la forme générique de système dynamique largement étudié en théorie du contrôle linéaire (Zhou *et al.*, 1996). On pourra donc transposer assez facilement à nos problèmes tous les résultats issus des travaux des automaticiens.

Par la suite, la section 2.3.1 décrit le contexte général associé à la théorie du contrôle linéaire. A cette occasion, on montrera que le formalisme développé dans le cadre de cette théorie permet de prendre en compte de manière rigoureuse les perturbations susceptibles d'être subies par le système dynamique à contrôler, ainsi que les éventuels bruits de mesure. Dans la section 2.3.2, on présente la théorie du contrôle sur  $\mathcal{H}_2$ . Dans une première partie, on expose la méthode du contrôle optimal dite encore méthode LQR (*Linear Quadratic Regulator*) pour laquelle on considère que l'état du système peut être connu de manière exacte. Dans une seconde partie, on introduit la méthode LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) qui remplace la méthode LQR lorsqu'il y a nécessité d'estimer (par filtre de Kalman, par exemple) l'état du système. Enfin, à la section 2.3.3, on discute de la théorie du contrôle sur  $\mathcal{H}_\infty$ . Contrairement au cas de la théorie du contrôle sur  $\mathcal{H}_2$ , on ne s'intéresse plus à des perturbations pouvant être représentées par des bruits blancs gaussiens mais à la pire perturbation que peut subir le système, d'où le nom de contrôle robuste porté encore par le contrôle sur  $\mathcal{H}_\infty$ . Enfin,

9. Cette démarche conduit alors aux équations d'Orr-Sommerfeld.

10. A titre d'illustration, dans le cas de l'écoulement de canal étudié par Thomas Bewley dans Bewley et Agarwal (1996); Bewley et Liu (1998); Bewley (2001), les variables du système (2.2) correspondent à :

- $\phi$  : coefficients de Fourier des composantes normales de la vitesse et de la vorticité,
- $c$  : vitesses d'aspiration/soufflage aux parois,
- $\psi_m$  : frottements longitudinal et transversal estimés aux parois.

11. Il n'y a aucune raison pour que ces observables soient confondues avec les états du système.

la section 2.3.4 propose une application numérique de la méthode LQR au contrôle de l'équation de la chaleur.

Dans l'esprit, les sections 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3 suivent de manière fidèle les résumés de la théorie du contrôle linéaire que l'on peut trouver dans Bewley et Agarwal (1996); Bewley et Liu (1998). La présentation ne se veut donc pas mathématique et seules les idées essentielles seront présentées. Pour une présentation plus rigoureuse mais aussi plus complète<sup>12</sup> de la théorie du contrôle, le lecteur pourra se reporter à Stengel (1994); Zhou *et al.* (1996).

### 2.3.1 Contexte de la théorie du contrôle linéaire

Pour commencer, supposons l'évolution des variables d'état  $\phi$  et des observables  $\psi_m$  connue via le système  $\mathcal{P}$  donné par l'équation (2.2). La théorie du contrôle linéaire a pour objet la détermination d'une loi de contrôle  $c$ , utilisant les observables  $\psi_m$ , telle que les fonctions d'état  $\phi$  tendent vers  $\mathbf{0}$ , et cela même en présence de perturbations extérieures et de bruits de mesures.

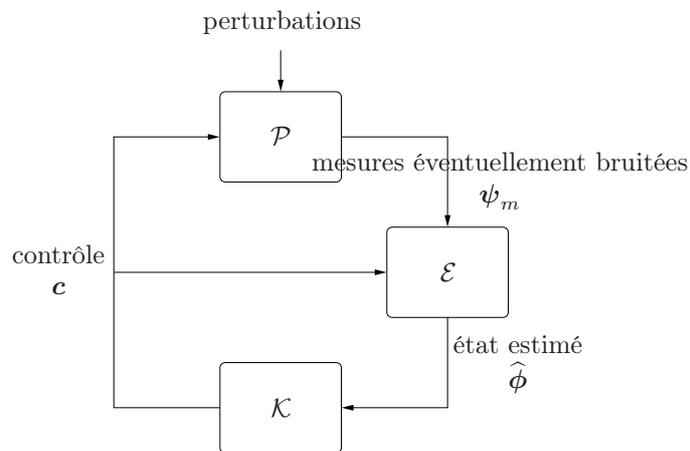


FIGURE 2.1 – Diagramme bloc illustrant le contexte général de la théorie du contrôle linéaire.

Le cas général correspond à un système  $\mathcal{P}$  qui peut éventuellement être excité par des perturbations extérieures. Dans ces conditions, il est impossible d'observer directement l'état  $\phi$  du système  $\mathcal{P}$ , et seules quelques mesures bruitées  $\psi_m$  peuvent être obtenues. Ces mesures sont alors utilisées afin de déterminer par un estimateur appelé  $\mathcal{E}$ , une valeur approchée  $\hat{\phi}$  de l'état  $\phi$ . Finalement, l'estimé  $\hat{\phi}$  est utilisé pour déterminer via un contrôleur  $\mathcal{K}$  une loi de contrôle par feedback<sup>13</sup>  $c$  telle que l'état  $\phi$  converge vers  $\mathbf{0}$  le plus rapidement possible. Les circulations d'information relatives à cette procédure sont rappelées de manière schématique dans le diagramme bloc de la figure 2.1.

Formalisons maintenant un peu cette description en précisant les expressions de l'estimateur  $\mathcal{E}$  et du contrôleur  $\mathcal{K}$ .

Mathématiquement, on considère que l'étape d'estimation caractérisée par l'estimateur<sup>14</sup>  $\mathcal{E}$  peut être représentée par le système d'équations :

12. En particulier, il ne sera pas évoqué dans la suite de l'exposé, les notions de commandabilité et observabilité du système  $\mathcal{P}$  défini par (2.2), notions pourtant essentielles en terme de contrôle. Le lecteur pourra se référer à Zhou *et al.* (1996) pour les éléments de théorie et à Galletti *et al.* (2004) pour un exemple d'application de ces notions au contrôle du sillage d'un cylindre de section carrée.

13. Chaque chose étant histoire de compromis, on a choisi, dans ce mémoire, d'utiliser l'anglicisme *feedback* au lieu de rétroaction.

14. En boucle fermée l'estimateur  $\mathcal{E}$  s'écrit :

$$\dot{\hat{\phi}} = (A + LC)\hat{\phi} + (B + LD)c - L\psi_m.$$

$$\dot{\hat{\phi}} = A\hat{\phi} + Bc - \hat{c} \quad (2.3a)$$

$$\hat{\psi}_m = C\hat{\phi} + Dc \quad (2.3b)$$

$$\hat{c} = L(\psi_m - \hat{\psi}_m) \quad (2.3c)$$

où  $\hat{c}$  peut être interprété comme un terme de forçage du système  $\mathcal{P}$  et où  $\hat{\psi}_m$  représentent les mesures associées aux estimés  $\hat{\phi}$ .

Connaissant  $\hat{\phi}$  via l'estimateur  $\mathcal{E}$ , cet état estimé peut ensuite être utilisé via un contrôleur  $\mathcal{K}$  pour déterminer les paramètres de contrôle  $c$ . Ce contrôleur  $\mathcal{K}$  est défini par une relation du type :

$$c = K(\hat{\phi}). \quad (2.4)$$

Posé en ces termes, le contrôle linéaire dans l'espace des états consiste à déterminer les opérateurs  $L$  et  $K$  caractéristiques respectivement de l'estimateur  $\mathcal{E}$  et du contrôleur  $\mathcal{K}$  tels que :

1. les termes  $\hat{c}$  forcent<sup>15</sup> l'état estimé  $\hat{\phi}$  donné par le système (2.3) à approcher l'état  $\phi$  du système  $\mathcal{P}$  solution de (2.2),
2. les termes de contrôle  $c$  évalués par le système (2.4) font tendre vers  $\mathbf{0}$  les fonctions d'état  $\phi$ , solutions du système (2.2).

Dans les sections suivantes, nous présentons comment les théories du contrôle respectivement basées sur les espaces fonctionnelles  $\mathcal{H}_2$  (§ 2.3.2) et  $\mathcal{H}_\infty$  (§ 2.3.3) permettent de déterminer les opérateurs  $L$  et  $K$  via la résolution de deux Equations Algébriques de Riccati (*Algebraic Riccati Equation*).

## 2.3.2 Théorie du contrôle sur $\mathcal{H}_2$

### 2.3.2.1 Contrôle optimal LQR

Le premier niveau d'approximation que l'on peut réaliser est de considérer que le système  $\mathcal{P}$  ne subit aucune perturbation extérieure et que l'on peut déterminer de manière exacte l'état du système par les mesures. Par conséquent, il n'y a alors aucune nécessité d'estimer l'état du système ( $\hat{\phi} \equiv \phi$ ) et le système (2.2) définissant  $\mathcal{P}$  s'écrit alors :

$$\dot{\phi} = A\phi + Bc \quad (2.5a)$$

$$\psi_m = \phi. \quad (2.5b)$$

Cette approche très optimiste (pas de perturbations, état du système parfaitement connu), permet d'obtenir la meilleure performance pour le contrôle du système  $\mathcal{P}$ . Pour cette raison, le contrôleur associé est dit *optimal*.

L'objectif du contrôleur  $\mathcal{K}$  défini par le système (2.3) est d'amortir<sup>16</sup> le plus rapidement possible toute perturbation  $\phi$  générée par une condition initiale quelconque et cela en limitant le coût lié au contrôle. Mathématiquement, cela peut se traduire par un problème de minimisation pour la fonctionnelle objective suivante<sup>17</sup> :

$$\mathcal{J}_{LQR}(\phi, c) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\|\phi\|^2 + \ell^2 c^* c) dt.$$

Le terme  $\ell^2$  intervenant dans  $\mathcal{J}_{LQR}$  joue le même rôle que le coefficient  $\beta$ , dit de régularisation, discuté à la section 2.2.2.

15. On constate effectivement que lorsque  $\hat{c}$  tend vers zéro, le système d'estimation (2.3) devient équivalent au système  $\mathcal{P}$  donné par (2.2).

16. Dis autrement, on cherche à ramener vers zéro une mesure donnée de l'état  $\phi$  obtenu à partir d'une condition initiale quelconque *i.e.* à amortir les perturbations.

17. Ici,  $A^*$  représente la matrice adjointe de  $A$  *i.e.* la matrice transposée conjuguée de  $A$ .

Les équations d'état étant linéaires, la fonctionnelle coût quadratique et l'objectif étant d'amortir<sup>18</sup> des perturbations, la méthode est appelée LQR pour *Linear Quadratic Regulator*.

A l'aide d'une factorisation de Choleski, la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{LQR}$  peut s'écrire plus simplement sous la forme

$$\mathcal{J}_{LQR}(\boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\chi}^* \boldsymbol{\chi} dt$$

où la variable  $\boldsymbol{\chi}$  est définie par

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} Q^{1/2} \phi / \ell \\ \mathbf{c} \end{pmatrix},$$

$Q$  étant une matrice<sup>19</sup> diagonale qui permet de traduire matriciellement la fonction de poids utilisée pour évaluer de manière discrète les produits scalaires continus.

Afin de pouvoir généraliser facilement aux sections suivantes les expressions, on introduit les notations<sup>20</sup> :

$$B_2 \equiv B \quad ; \quad C_1 \equiv \begin{pmatrix} Q^{1/2} / \ell \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}.$$

et on considère que l'équation (2.5a) est modifiée par l'introduction d'un terme d'un terme de forçage<sup>21</sup>  $\mathbf{f}$  au second membre.

Compte tenu de ces changements de notation, le système gouvernant l'évolution de l'état  $\phi$ , le terme  $\boldsymbol{\chi}$  à optimiser et l'état estimé  $\hat{\phi}$  s'écrivent :

$$\dot{\phi} = A\phi + \mathbf{f} + B_2 \mathbf{c} \quad (2.6a)$$

$$\boldsymbol{\chi} = C_1 \phi + D_{12} \mathbf{c} \quad (2.6b)$$

$$\hat{\phi} = \phi. \quad (2.6c)$$

Le système  $\mathcal{P}$  étant maintenant gouverné par l'équation (2.6a), le problème à résoudre peut finalement s'énoncer de la manière suivante :

*Déterminer le contrôleur  $\mathcal{K}_{LQR}$  tel que par application du contrôle  $\mathbf{c}$ , calculé à partir de l'état estimé  $\hat{\phi}$ , le système  $\mathcal{P}$  converge vers l'état  $\phi$  qui minimise la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}_{LQR}(\boldsymbol{\chi})$ .*

Sous forme condensée, le système (2.6) peut s'écrire comme

$$\mathcal{P}_{LQR} = \begin{matrix} \dot{\phi} \\ \boldsymbol{\chi} \\ \hat{\phi} \end{matrix} \left[ \begin{array}{c|cc} \phi & \mathbf{f} & \mathbf{c} \\ \hline A & I & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ \hline I & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.7)$$

introduisant, de cette manière, un nouveau système dénommé  $\mathcal{P}_{LQR}$ , système caractéristique de la méthode LQR. Par ailleurs, les circulations d'information relatives à la méthode LQR peuvent être représentées schématiquement par le diagramme bloc de la figure 2.2.

18. Les anglo-saxons utilisent le verbe "regulate".

19. Dans le cas de l'écoulement de canal étudié par Bewley, les termes diagonaux de  $Q$  sont égaux à  $\pi/N$  (équation (2.10), page 312 de Bewley et Liu, 1998).

20. Dans  $D_{12}$ ,  $I$  représente la matrice identité.

21. Dans la méthode LQR, les perturbations sont amorties sans qu'il y ait besoin d'introduire de forçage autre que le contrôle  $\mathbf{c}$ , le terme  $\mathbf{f}$  est donc égal à zéro et introduit uniquement dans un soucis de généralité.

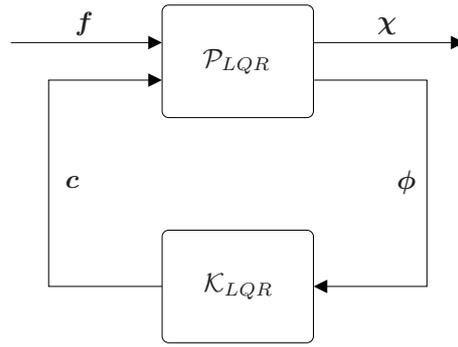


FIGURE 2.2 – Diagramme bloc illustrant la méthode de contrôle optimal LQR.

Le problème énoncé précédemment est équivalent à un problème d'optimisation sous contraintes. On verra à la section 2.4.1, qu'une manière classique en optimisation de transformer un problème d'optimisation sous contraintes en un autre problème d'optimisation sans contrainte, est d'introduire des multiplicateurs de Lagrange. De manière à imposer la contrainte donnée par l'équation (2.6a), pour laquelle on a considéré  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , on introduit les multiplicateurs de Lagrange  $\xi$ . On peut alors introduire la fonctionnelle  $\mathcal{L}$ , dite de Lagrange, définie<sup>22</sup> par :

$$\mathcal{L}(\phi, \mathbf{c}, \xi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \chi^* \chi dt - \int_0^\infty \xi^* \left( \frac{d\phi}{dt} - A\phi - B_2 \mathbf{c} \right) dt.$$

La solution du problème d'optimisation sans contrainte est alors déterminée en annulant successivement les dérivées de Fréchet<sup>23</sup> de  $\mathcal{L}$  suivant les variables<sup>24</sup>  $\phi$  et  $\mathbf{c}$ .

En annulant la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant les variables d'état  $\phi$ , on trouve l'équation

$$-\frac{d\xi}{dt} = A^* \xi + C_1^* C_1 \phi, \quad \xi(\infty) = \mathbf{0}.$$

dite *équation adjointe* de la contrainte (2.6a).

Enfin, annuler la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant les variables de contrôle  $\mathbf{c}$  donne la relation :

$$\mathbf{c} = -B_2^* \xi. \quad (2.8)$$

En optimisation, cette équation est appelée *condition d'optimalité* : elle correspond à la condition qui doit être vérifiée au minimum de la fonctionnelle objectif (voir section 2.4.1).

Compte tenu de cette condition d'optimalité, l'équation (2.6a) du système  $\mathcal{P}_{LQR}$  combinée à l'équation adjointe (2.3.2) s'écrit sous la forme du système linéaire d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = A\phi - B_2 B_2^* \xi \\ -\frac{d\xi}{dt} = A^* \xi + C_1^* C_1 \phi \end{cases}$$

Il est alors possible d'écrire ce système sous la forme matricielle

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix} = H_{LQR} \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}$$

où

$$H_{LQR} = \begin{pmatrix} A & -B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{pmatrix}$$

22. Dans cette expression, on a  $\chi^* \chi = \phi^* C_1^* C_1 \phi + \mathbf{c}^* \mathbf{c}$ .

23. La définition de la dérivée de Fréchet est rappelée à la note de bas de page 43 située à la section 2.4.1.

24. Comme il sera également précisé à la section 2.4.1, évaluer la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant la variable  $\xi$  redonnerait immédiatement l'équation de contrainte (2.6a), ce qui explique qu'on ne mentionne pas ici la variable  $\xi$ .

est la matrice Hamiltonienne<sup>25</sup> du système.

L'équation algébrique de Riccati associée à cette matrice Hamiltonienne s'écrit alors :

$$\Pi A + A^* \Pi - \Pi B_2 B_2^* \Pi + C_1^* C_1 = 0. \quad (2.9)$$

Or, soit  $\Pi_{K_2}$  la solution Hermitienne définie positive de l'équation de Riccati construite sur  $H_{LQR}$ , ce que l'on note encore  $\Pi_{K_2} = Ric(H_{LQR})$ , on montre (Zhou *et al.*, 1996, page 377) que l'opérateur de feedback  $K_2$  dont on cherche l'expression est simplement donné par

$$K_2 = -B_2^* \Pi_{K_2}.$$

Par conséquent, le contrôleur  $\mathcal{K}_{LQR}$  est défini de la manière suivante<sup>26</sup> :

$$\mathbf{c} = K_2 \phi = -B_2^* \Pi_{K_2} \phi.$$

Ce contrôleur permet donc de minimiser la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{LQR}$ , correspondant à l'énergie d'une perturbation  $\phi$  quelconque, dans le cas où le système  $\mathcal{P}$  est supposé parfait *i.e.* lorsqu'il ne subit aucune perturbation extérieure.

### 2.3.2.2 Filtre de Kalman-Bucy (KBF)

A la section précédente, nous avons présenté un cas simple pour lequel le système  $\mathcal{P}$  ne subissait pas de perturbation extérieure, permettant ainsi de mesurer précisément l'état du système. Considérons maintenant le cas où le système  $\mathcal{P}$  est en présence de perturbations extérieures. L'état du système ne peut alors plus être connu de manière exacte et il faut donc dans un premier temps l'estimer avant de pouvoir l'utiliser pour déterminer le contrôle. Cette opération d'estimation peut être réalisée par un filtre de Kalman-Bucy. Pour cela, on suppose que les perturbations du système  $\mathcal{P}$  et les bruits de mesure se comportent comme des bruits blancs Gaussiens non corrélés entre eux. On introduit alors deux bruits blancs Gaussiens nuls en moyenne  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$ , de matrice de covariance<sup>27</sup> respective  $E[\mathbf{w}_1^* \mathbf{w}_1] = I$  et  $E[\mathbf{w}_2^* \mathbf{w}_2] = I$ . Soient  $G_1$  et  $G_2$ , la racine carré respective de la covariance des perturbations du système  $\mathcal{P}$  et de la covariance des bruits de mesure, le système  $\mathcal{P}$  s'écrit maintenant :

$$\dot{\phi} = A\phi + G_1 \mathbf{w}_1 + B\mathbf{c} \quad (2.10a)$$

$$\psi_m = C\phi + G_2 \mathbf{w}_2 + D\mathbf{c}. \quad (2.10b)$$

L'objectif du filtre de Kalman-Bucy est d'estimer au mieux l'état du système  $\phi$  en se basant uniquement sur les observables  $\psi_m$ . Autrement dit, le filtre de Kalman-Bucy cherche à faire tendre vers zéro le plus rapidement possible la norme du signal d'erreur  $\phi_E$  définie par

$$\phi_E = \phi - \hat{\phi}$$

où  $\hat{\phi}$  est l'état estimé par un filtre de la forme (2.3). Mathématiquement, la fonctionnelle objectif associée à ce problème peut être définie par :

---

25. Soient  $A$ ,  $Q$  et  $R$ , trois matrices réelles  $n \times n$  avec  $Q$  et  $R$  des matrices symétriques. Par définition (Zhou *et al.*, 1996), toute matrice  $2n \times 2n$  s'écrivant sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{pmatrix}$$

est une matrice Hamiltonienne. Par ailleurs, on rappelle qu'à toute matrice Hamiltonienne  $H$ , on peut associer une équation algébrique de Riccati donnée par la relation  $(-\Pi \quad I)H \begin{pmatrix} I \\ \Pi \end{pmatrix} = -\Pi A - A^* \Pi - \Pi R \Pi - Q = 0$ . Enfin, précisons qu'étant donné le rôle central joué par les équations de Riccati algébriques, de nombreux solveurs existent pour résoudre numériquement cette équation.

26. Puisque la condition d'optimalité (2.8) s'écrit  $\mathbf{c} = -B_2^* \xi$ , on obtient que la solution de la méthode LQR est telle que  $\Pi_{K_2} = Ric(H_{LQR})$  relie les variables adjointes  $\xi$  aux variables d'état  $\phi$  ( $\xi = \Pi_{K_2} \phi$ ).

27. De manière classique,  $E[\cdot] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\cdot] dt$  représente l'espérance mathématique.

$$\mathcal{J}_{KBF} = E[\|\chi_E\|^2]$$

où  $\chi_E \equiv \phi_E$  pour des problèmes de notation. Le meilleur estimé possible de l'état complet  $\phi$  sera donc donné par la solution minimisant la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{KBF}$ .

Afin de permettre une généralisation aisée de cette approche aux sections suivantes, nous allons introduire de nouvelles notations. Définissons d'abord  $\mathbf{w}$ , vecteur de perturbations, par :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{pmatrix}$$

et posons<sup>28</sup> ensuite :

$$B_1 \equiv (G_1 \ 0) \ ; \ C_2 \equiv G_2^{-1}C \ ; \ D_{21} \equiv (0 \ I).$$

Enfin, construisons par simple changement de variables, deux nouveaux vecteurs d'observations  $\psi$  et  $\hat{\psi}$  :

$$\psi \equiv G_2^{-1}(\psi_m - D\mathbf{c}) \ ; \ \hat{\psi} \equiv G_2^{-1}(\hat{\psi}_m - D\mathbf{c}).$$

Compte tenu de ces changements de notation, les équations (2.10b) et (2.3b) deviennent

$$\psi = C_2\phi + D_{21}\mathbf{w}, \quad (2.11a)$$

$$\hat{\psi} = C_2\hat{\phi}. \quad (2.11b)$$

Puisque l'on cherche à développer un estimateur, il est logique de déterminer l'équation d'évolution de  $\phi_E$ , signal d'erreur entre l'état  $\phi$  et sa valeur estimée  $\hat{\phi}$  et de  $\psi_E$ , erreur commise entre la nouvelle observable  $\psi$  et son estimée  $\hat{\psi}$ . En soustrayant, d'une part l'équation (2.10a) de l'équation (2.3a) et d'autre part l'équation (2.11b) de l'équation (2.11a), on trouve le système :

$$\dot{\phi}_E = A\phi_E + B_1\mathbf{w} + \hat{\mathbf{c}} \quad (2.12a)$$

$$\chi_E = \phi_E \quad (2.12b)$$

$$\psi_E = C_2\phi_E + D_{21}\mathbf{w}. \quad (2.12c)$$

Le filtre de Kalman-Bucy  $\mathcal{L}_{KBF}$ , que l'on cherche à déterminer, utilise donc  $\psi_E$ , erreur commise sur les observables, pour évaluer  $\hat{\mathbf{c}}$ , terme de forçage des équations d'évolution du signal d'erreur  $\phi_E$  tel que la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{KBF}(\chi_E)$  soit minimale en présence de perturbations gaussiennes  $\mathbf{w}$ .

Sous forme condensée, le système (2.12) peut s'écrire comme

$$\mathcal{P}_{KBF} = \begin{array}{c} \dot{\phi}_E \\ \chi_E \\ \psi_E \end{array} \left[ \begin{array}{c|cc} \phi_E & \mathbf{w} & \hat{\mathbf{c}} \\ \hline A & B_1 & I \\ I & 0 & 0 \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (2.13)$$

introduisant, de cette manière, un nouveau système<sup>29</sup> dénommé  $\mathcal{P}_{KBF}$ , système caractéristique du filtre de Kalman-Bucy. Par ailleurs, les circulations d'information relatives au filtre de Kalman-Bucy peuvent être représentées schématiquement par le diagramme bloc de la figure 2.3.

28. Pour cela, il faut admettre que la matrice  $G_2$  est inversible.

29. On peut remarquer qu'en prenant le transposé conjugué du système  $\mathcal{P}_{LQR}$  donné par l'équation (2.7), on obtient la même structure de matrice que celle correspondant au système  $\mathcal{P}_{KBF}$  donné par l'équation (2.13). Pour cette raison, ces deux problèmes sont dit duaux.

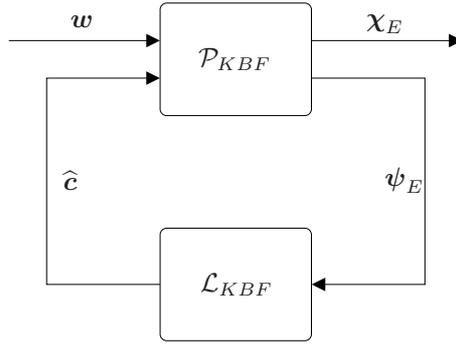


FIGURE 2.3 – Diagramme bloc illustrant le filtre de Kalman-Bucy.

De manière similaire à ce qui avait été réalisé pour la méthode LQR à la section précédente, on peut, connaissant l'expression du système  $\mathcal{P}_{KBF}$ , introduire la matrice hamiltonienne  $H_{KBF}$  du système :

$$H_{KBF} = \begin{pmatrix} A^* & -C_2^* C_2 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{pmatrix}.$$

L'équation algébrique de Riccati associée à  $H_{KBF}$  s'écrit :

$$A\Pi + \Pi A^* - \Pi C_2^* C_2 \Pi + B_1 B_1^* = 0. \quad (2.14)$$

Soit  $\Pi_{L_2} = Ric(H_{KBF})$ , l'opérateur de feedback  $L_2$  dont on cherche l'expression est simplement donné (Zhou *et al.*, 1996) par

$$L_2 = -\Pi_{L_2} C_2^*.$$

Par conséquent, le filtre de Kalman-Bucy  $\mathcal{L}_{KBF}$  est caractérisé par la relation :

$$\hat{c} = L_2 \psi_E = -\Pi_{L_2} C_2^* \psi_E.$$

et l'estimateur  $\hat{\phi}$  de l'état  $\phi$  est gouverné par l'expression :

$$\hat{\phi} = A\hat{\phi} + B_2 c - L_2(\psi - C_2 \hat{\phi}).$$

Finalement, cet estimateur minimise  $E[\|\phi - \hat{\phi}\|^2]$  dans un modèle soumis à des perturbations gaussiennes pour le système  $\mathcal{P}$  et à des bruits de mesure de type gaussien.

### 2.3.2.3 Contrôle sur $\mathcal{H}_2$ (LQG=LQR+KBF)

Dans cette section, nous allons combiner les résultats obtenus par la méthode LQR, pour la partie contrôleur, et par le filtre de Kalman-Bucy, pour la partie estimation, dans l'objectif de construire un couple<sup>30</sup> contrôleur/estimateur pour le système  $\mathcal{P}$  soumis à des perturbations Gaussiennes. Par conséquent, on considérera le système  $\mathcal{P}$  gouverné par le système d'équations (2.10).

L'objectif du contrôle est de minimiser la fonctionnelle<sup>31</sup>

$$\mathcal{J}_{LQG} = E[\|\phi\|^2 + \ell^2 c^* c],$$

où  $\|\cdot\|$  représente la norme euclidienne ou encore norme  $\mathcal{L}_2$ .

30. On recherche un couple contrôleur/estimateur du même type que les systèmes d'équations (2.4) et (2.3).

31. Il est aisé de remarquer que de la même manière que pour la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{LQR}$ , on peut transformer  $\mathcal{J}_{LQG}$  en

$$\mathcal{J}_{LQG} = E[\chi^* \chi]$$

où

$$\chi = \begin{pmatrix} Q^{1/2} \phi / \ell \\ c \end{pmatrix}.$$

Les équations d'état étant linéaires, la fonctionnelle coût quadratique et les perturbations supposées gaussiennes, la méthode est appelée LQG pour *Linear Quadratic Gaussian*. Par ailleurs, l'objectif étant de minimiser le carré d'une norme euclidienne, ce type d'approche est également connu sous le nom de contrôle  $\mathcal{H}_2$ .

En reprenant les mêmes notations que celles introduites dans les deux sections précédentes, les équations (2.10a), (2.6b) et (2.11a) deviennent :

$$\dot{\phi} = A\phi + B_1\mathbf{w} + B_2\mathbf{c} \quad (2.15a)$$

$$\chi = C_1\phi + D_{12}\mathbf{c} \quad (2.15b)$$

$$\psi = C_2\phi + D_{21}\mathbf{w}. \quad (2.15c)$$

Le couple contrôleur/estimateur sur  $\mathcal{H}_2$ , que l'on cherche à déterminer, utilise donc  $\psi$ , observables, pour évaluer  $\mathbf{c}$ , terme de forçage des équations d'évolution de l'état  $\phi$  tel que la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{LQG}(\chi)$  soit minimale en présence de perturbations gaussiennes  $\mathbf{w}$ .

Un résultat majeur de la théorie du contrôle (Lewis et Syrmos, 1995) est que pour trouver le contrôleur/estimateur sur  $\mathcal{H}_2$  qui minimise la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{LQG}$  pour le système (2.15), il suffit de combiner le contrôleur  $K_2$ , obtenu par la méthode LQR, et l'estimateur  $L_2$ , évalué par le filtre de Kalman-Bucy, soit :

$$K_2 = -B_2^* \Pi_{K_2} \quad \text{où } \Pi_{K_2} = Ric(H_{LQR}) = Ric \begin{pmatrix} A & -B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{pmatrix}$$

et

$$L_2 = -\Pi_{L_2} C_2^* \quad \text{où } \Pi_{L_2} = Ric(H_{KBF}) = Ric \begin{pmatrix} A^* & -C_2^* C_2 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{pmatrix}$$

Finalement, le couple contrôleur/estimateur sur  $\mathcal{H}_2$  est donné par :

$$\mathbf{c} = K_2 \hat{\phi} \quad (2.16a)$$

$$\dot{\hat{\phi}} = A\hat{\phi} + B_2\mathbf{c} - L_2(\psi - C_2\hat{\phi}). \quad (2.16b)$$

On constate que la détermination du contrôleur  $K_2$  est indépendante des perturbations subies par le système qui interviennent dans les termes  $B_1$  et  $C_2$  (via les termes  $G_1$  et  $G_2$ ). De même, la détermination de l'estimateur  $L_2$  ne dépend pas des fonctions de poids  $Q$  utilisées pour évaluer la fonctionnelle objectif (terme  $C_1$ ), ni de la manière par laquelle le contrôle  $\mathbf{c}$  agit sur l'état  $\phi$  (terme  $B_2$ ). Autrement dit, sur  $\mathcal{H}_2$ , les problèmes de contrôle et d'estimation sont complètement découplés.

### 2.3.3 Théorie du contrôle robuste sur $\mathcal{H}_\infty$

Le couple contrôleur/estimateur sur  $\mathcal{H}_\infty$  que l'on va décrire dans cette section est très semblable à celui discuté sur  $\mathcal{H}_2$  à la section précédente. Seules des considérations différentes sur les perturbations sont portées : au lieu de supposer que les perturbations suivent une loi gaussienne, on considère ici la "pire" perturbation susceptible de déstabiliser le système que l'on nomme  $\kappa$  pour la différentiel des perturbations précédentes.

Les équations du système seront donc identiques aux équations (2.15) dans lesquelles on aura pris soin de remplacer les perturbations  $\mathbf{w}$  par  $\kappa$  :

$$\dot{\phi} = A\phi + B_1\kappa + B_2\mathbf{c} \quad (2.17a)$$

$$\chi = C_1\phi + D_{12}\mathbf{c} \quad (2.17b)$$

$$\psi = C_2\phi + D_{21}\kappa. \quad (2.17c)$$

Soit  $T_{\chi\kappa}$ , la fonction de transfert des perturbations  $\kappa$ , subies par le système, aux mesures de performance de la boucle de contrôle par feedback  $\chi$ , le couple contrôleur/estimateur, auquel on s'intéresse ici, doit être

tel que  $\|T_{\chi\kappa}\|_{\infty} < \gamma$  où  $\gamma$  est une constante donnée et  $\|\cdot\|_{\infty}$ , la norme<sup>32</sup> infinie de la fonction de transfert. Pour cette raison, cette approche est appelée contrôle sur  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

Dans cette approche, l'objectif du contrôle est de minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{J}_{\infty} = E[\phi^* Q \phi + \ell^2 c^* c - \gamma^2 \kappa^* \kappa].$$

Finalement, le couple contrôleur/estimateur sur  $\mathcal{H}_{\infty}$ , que l'on cherche à déterminer, utilise donc  $\psi$ , observables, pour évaluer  $c$ , terme de forçage des équations d'évolution de l'état  $\phi$  tel que la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{\infty}(\chi)$  soit minimale en présence des "pires"<sup>33</sup> perturbations  $\kappa$ . Comme à la section précédente, les matrices  $G_1$  et  $G_2$  caractérisent la covariance de chacune des perturbations (système et mesures) éventuellement connue par ailleurs. Si les perturbations ne sont pas connues alors on considère que ces matrices sont données par la matrice identité.

Finalement, on peut montrer (Lewis et Syrmos, 1995) que le contrôleur/estimateur sur  $\mathcal{H}_{\infty}$  de la forme (2.4)/(2.3) qui minimise  $\mathcal{J}_{\infty}$  en présence de la "pire" perturbation  $\kappa$  est définie par le système :

$$c = K_{\infty} \hat{\phi} \tag{2.18a}$$

$$\dot{\hat{\phi}} = A \hat{\phi} + B_2 c - L_{\infty} (\psi - C_2 \hat{\phi}) \tag{2.18b}$$

où le contrôleur  $K_{\infty}$  et l'estimateur  $L_{\infty}$  sont respectivement donnés par :

$$K_{\infty} = -B_2^* \Pi_{K_{\infty}} \quad \text{où } \Pi_{K_{\infty}} = Ric \left( \begin{array}{cc} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{array} \right) \tag{2.19}$$

et

$$L_{\infty} = -\Pi_{L_{\infty}} C_2^* \quad \text{où } \Pi_{L_{\infty}} = Ric \left( \begin{array}{cc} A^* & \gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* C_2 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{array} \right). \tag{2.20}$$

On obtient<sup>34</sup> que lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , le problème de contrôle sur  $\mathcal{H}_{\infty}$  est équivalent au problème de contrôle sur  $\mathcal{H}_2$  de type LQG. Par conséquent, les seules équations (2.19) et (2.20) définissent les équations de Riccati qui sont associées aux problèmes de contrôle sur  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

Les termes  $\gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 B_2^*$  et  $\gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* C_2$  ne devant pas être définis négatifs, les équations algébriques de Riccati définies ci-dessus admettent une solution uniquement pour  $\gamma$  suffisamment grand. La plus petite valeur de  $\gamma$  appelée  $\gamma_0$  telle que ces équations admettent une solution est déterminée numériquement par essais successifs. Pour  $\gamma \geq \gamma_0$ , on dit que le contrôleur/estimateur sur  $\mathcal{H}_{\infty}$  est sous-optimal.

Une caractéristique essentielle du contrôle sur  $\mathcal{H}_{\infty}$  est que, contrairement au cas du contrôle sur  $\mathcal{H}_2$ , les phases de détermination du contrôleur et de l'estimateur sont couplées. En effet, on constate que le contrôleur  $K_{\infty}$  dépend de la covariance des perturbations du système par l'intermédiaire de  $B_1$ . De même, la détermination de l'estimateur  $L_{\infty}$  dépend des fonctions de poids utilisées pour évaluer numériquement la fonctionnelle objectif par l'intermédiaire de  $C_1$ .

Enfin, on trouve que les propriétés de stabilité d'un contrôleur/estimateur sur  $\mathcal{H}_{\infty}$  sont généralement meilleures que celles obtenues par le contrôleur/estimateur sur  $\mathcal{H}_2$ .

---

32. Pour introduire la norme infinie d'une fonction de transfert, il faut considérer le système dans le domaine fréquentiel. Par définition (Zhou *et al.*, 1996), on a alors :

$$\|T_{\chi\kappa}\|_{\infty} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(T_{\chi\kappa}(j\omega))$$

où  $\sigma_{\max}$  correspond à la plus grande valeur singulière.

33. Par définition, ces "pires" perturbations sont telles que leurs actions provoquent une augmentation de la fonctionnelle coût  $\mathcal{J}_{\infty}$  la plus importante parmi toutes les perturbations envisageables. Par ailleurs, puisque le contrôleur/estimateur que l'on recherche doit minimiser la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{\infty}$ , on peut considérer que le problème du contrôle sur  $\mathcal{H}_{\infty}$  est équivalent à un problème de "min-max" (Zhou *et al.*, 1996, chapitre 15). Le terme  $-\gamma^2$  introduit dans la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{\infty}$  joue le rôle de paramètre de régularisation (section 2.2.2).

34. Comme on pouvait intuitivement s'y attendre !

### 2.3.4 Application à l'équation de la chaleur

A titre d'illustration des méthodes de contrôle linéaire dans l'espace des états, nous appliquons la méthode LQR présentée à la section 2.3.2 au contrôle distribué de l'équation de la chaleur<sup>35</sup>.

L'équation de la chaleur monodimensionnelle s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi \quad (2.21)$$

où  $\Phi$  représente un terme de contrôle distribué.

L'équation (2.21) sera résolue dans le domaine  $\mathcal{D}$  défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, t) \in [0, L] \times [0, T]\}$$

et sera munie de la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.22)$$

ainsi que des conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(L, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Après discrétisation spatiale sur  $n_X$  nœuds, l'équation de la chaleur s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} + B\Phi, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.24)$$

$$\text{où } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_X-1} \\ u_{n_X} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{n_X-1} \\ \Phi_{n_X} \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\nu}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = I_{n_X}.$$

Dans cet exemple, on cherche à déterminer par méthode LQR le contrôle  $\Phi$  à exercer pour que la fonction  $\mathbf{u}$  approche sur  $\mathcal{D}$  une fonction<sup>36</sup>  $\hat{\mathbf{u}}$  donnée. L'objectif du contrôle est donc de minimiser la fonctionnelle coût définie par :

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, \Phi) = \frac{1}{2} \int_0^T (\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|^2 + \ell^2 \Phi^* \Phi) dt.$$

La forme de ce problème n'est pas exactement celle qui permet d'utiliser le formalisme de la méthode LQR. Pour corriger cela, on réalise un changement de variable, en posant  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}$ .

En considérant que le profil  $\hat{\mathbf{u}}$  est indépendant du temps, le système (2.24) devient :

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt} = A(\tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}) + B\phi, \quad \tilde{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_0 - \hat{\mathbf{u}}(0) \quad (2.25)$$

et la fonctionnelle objectif s'écrit :

$$\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{u}}, \Phi) = \frac{1}{2} \int_0^T (\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 + \ell^2 \Phi^* \Phi) dt.$$

35. L'équation de la chaleur constitue un cas particulier (suppression du terme convectif) de l'équation de Burgers qui sera utilisée à la section 2.5 pour illustrer la méthode de contrôle optimal.

36. Attention, dans cette section, la notation  $\hat{\cdot}$  ne représente plus une grandeur estimée comme c'était le cas à la section 2.3.1.

Si, par ailleurs, on pose<sup>37</sup>

$$B_2 \equiv B \quad ; \quad C_1 \equiv \begin{pmatrix} Q^{1/2}/\ell \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors l'Equation Algébrique de Riccati<sup>38</sup> associée au problème LQR s'écrit :

$$\Pi A + A^* \Pi - \Pi B_2 B_2^* \Pi + C_1^* C_1 = 0. \quad (2.26)$$

et la loi de feedback est donnée par :

$$\Phi = K u = -B_2^* \Pi u.$$

Pour l'application numérique, nous avons choisi  $T = 1$ ,  $\Delta t = 0,0025$ ,  $L = 1$  et  $n_X = 101$ . La matrice de poids  $Q$  est une matrice diagonale de coefficients égaux à  $\Delta x = \frac{L}{n_X - 1}$  et  $\ell = 0,001$ .

#### PROCESSUS DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE

Initialisations : on pose  $n = 0$  et initialise le contrôle à  $\Phi^{(0)}$ .

1. Si un critère de convergence est satisfait, le processus itératif est stoppé. Le contrôle optimal est  $\Phi^{(n)}$ .  
Sinon
2. Résolution de l'équation de Riccati (2.26) pour déterminer la matrice  $\Pi$
3. Détermination du contrôleur  $K = -B_2^* \Pi$
4. Détermination d'une nouvelle loi de contrôle  $\Phi^{(n+1)} = K u$
5. Incrémentation :  $n = n + 1$  et retour à l'étape 1.

Les figures 2.4, 2.5 et 2.6 représentent, en coordonnées espace-temps, respectivement la consigne  $\hat{u}$ , la solution  $u$  non contrôlée ( $\Phi = 0$ ) et la solution  $u_{opt}$  du problème LQR. On constate que le profil de la solution optimale est très proche du profil cible  $\hat{u}$ , permettant ainsi de valider numériquement toute l'approche.

Finalement, nous avons représenté sur la figure 2.7 en coordonnées espace-temps, le contrôle distribué optimal  $\Phi_{opt}(x, t)$ . De manière qualitative, l'évolution spatio-temporelle du contrôle est en bon accord avec les profils de consigne et de solution non contrôlée.

---

37. On rappelle que  $Q$  est une matrice diagonale permettant de prendre en compte de manière discrète le produit scalaire.

38. En toute rigueur, l'horizon  $T$  n'étant pas infini, on devrait être amené à résoudre une équation différentielle de Riccati et non l'équation algébrique (2.26). Un processus itératif basé sur le contrôleur obtenu par résolution de cette équation algébrique donne cependant d'excellents résultats.

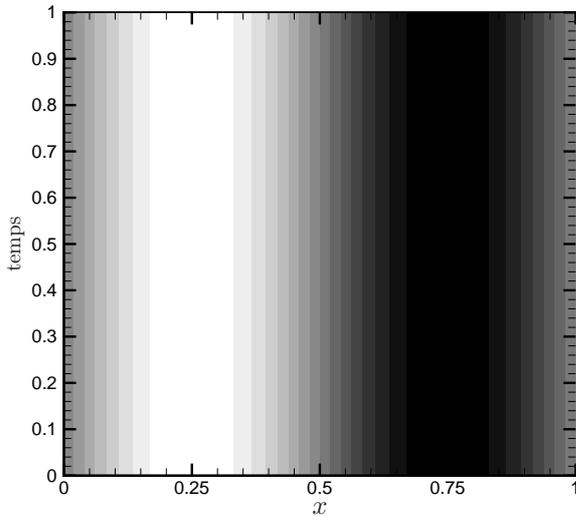


FIGURE 2.4 – Représentation en coordonnées espace-temps du profil de la consigne  $\hat{u}(x, t)$ .

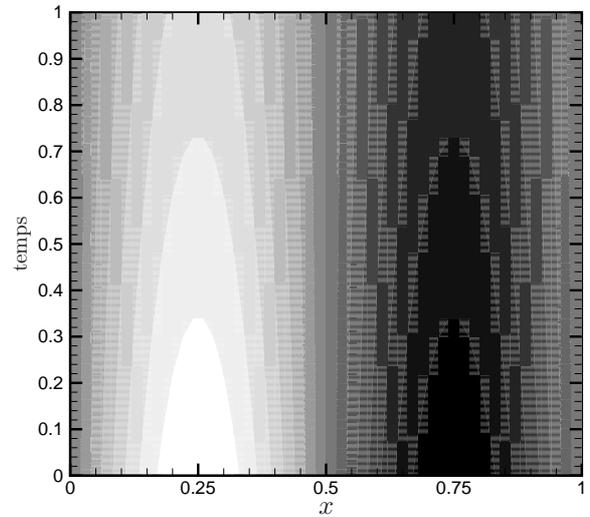


FIGURE 2.5 – Représentation en coordonnées espace-temps du profil  $u(x, t)$  obtenu pour  $\Phi = 0$ .

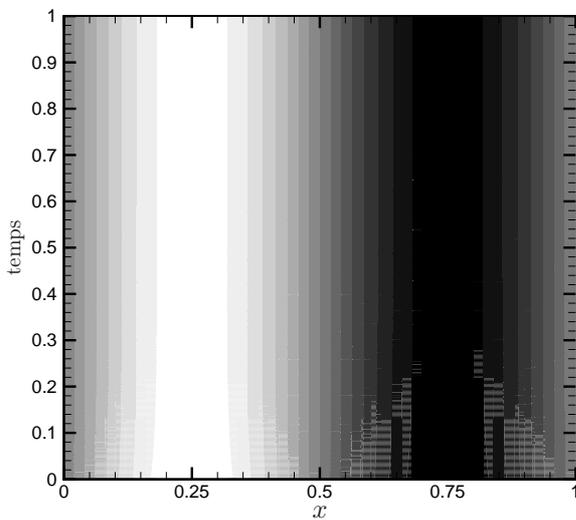


FIGURE 2.6 – Représentation en coordonnées espace-temps du profil optimal  $u_{opt}(x, t)$ .

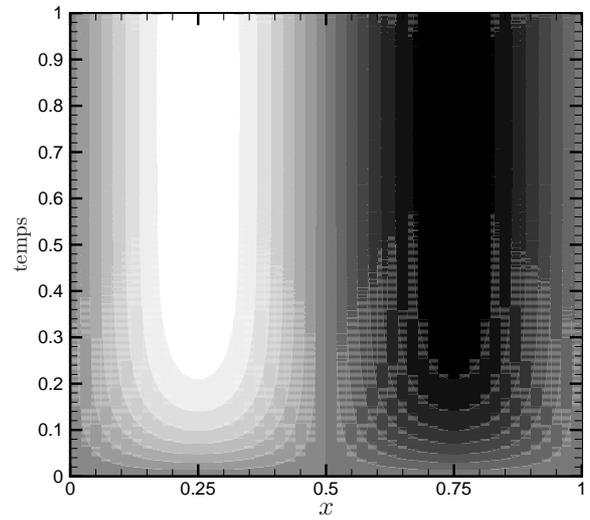


FIGURE 2.7 – Représentation en coordonnées espace-temps du contrôle distribué optimal  $\Phi_{opt}(x, t)$ .

## 2.4 Optimisation non linéaire

Lorsque les équations d'état intervenant dans le système  $\mathcal{P}$  de la figure 2.1 ne sont plus linéaires ou alors que l'hypothèse de linéarisation n'est plus valide (cas du contrôle des écoulements turbulents par exemple), les méthodes proposées à la section précédente ne sont plus envisageables. Pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes énoncé à la section 2.2.1, il ne reste alors que les méthodes d'optimisation non

linéaire. En référence<sup>39</sup> avec la méthode de contrôle LQR présentée à la section 2.3.2.1., cette approche est généralement dénommée *contrôle optimal*.

Les méthodes actuelles pour résoudre un problème d'optimisation sous contraintes se distinguent en deux classes (Gunzburger, 1997a). La première consiste à transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème d'optimisation sans contrainte via la méthode des multiplicateurs de Lagrange (§ 2.4.1) donnant alors des conditions d'optimalité du premier ordre. La seconde classe de méthodes utilise directement un algorithme d'optimisation (voir fin de la section 2.4.3) ce qui nécessite alors la détermination du gradient de la fonctionnelle objectif, ou au moins d'une approximation de celui-ci. Deux approches peuvent être utilisées pour évaluer ce gradient : l'approche par les sensibilités décrite à la section 2.4.2 et l'approche par l'état adjoint développée à la section 2.4.3.

Cette section doit beaucoup aux articles<sup>40</sup> de Gunzburger (1997a, 1999, 2000).

### 2.4.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Le principe consiste à prendre en compte de manière implicite via des multiplicateurs<sup>41</sup> de Lagrange  $\xi$  les contraintes ( $\mathcal{F}$ ) du problème. On définit alors une nouvelle fonctionnelle  $\mathcal{L}$ , dite fonctionnelle de Lagrange, qui permet d'introduire un problème d'optimisation sans contrainte. Le bien fondé d'une telle approche peut être rigoureusement démontré à l'aide des théories issues du contrôle optimal (lire Gunzburger, 1997b, pour des éléments de réponse).

La prise en compte implicite des contraintes est donc faite en introduisant une fonctionnelle de Lagrange  $\mathcal{L}$  définie comme :

$$\mathcal{L}(\phi, c, \xi) = \mathcal{J}(\phi, c) - \langle F(\phi, c), \xi \rangle \quad (2.27)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente un produit scalaire dont la définition dépend généralement de la nature du problème étudié. La dimension du vecteur  $\xi$  est égale au nombre de contraintes du problème initial. Le nouveau **problème d'optimisation sans contrainte** s'énonce alors :

*Déterminer les variables d'état  $\phi$ , les variables de contrôle  $c$  et les multiplicateurs de Lagrange (ou variables adjointes ou encore de co-état)  $\xi$  telles que la fonctionnelle de Lagrange  $\mathcal{L}$  présente un extremum.*

La fonctionnelle Lagrangienne  $\mathcal{L}$  admet un extremum lorsque  $\mathcal{L}$  est rendue "stationnaire" par rapport à chacun de ses arguments. En effet, le calcul des variations impose alors  $\delta\mathcal{L} = 0$ , soit :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0.$$

En supposant par la suite, les variables  $\phi$ ,  $c$  et  $\xi$  indépendantes<sup>42</sup>, les dérivées de Fréchet<sup>43</sup> de  $\mathcal{L}$  doivent être identiquement nulles dans toutes les directions admissibles  $\phi$ ,  $c$  et  $\xi$ , *i.e.* quelles que soient les variations  $\delta\phi$ ,  $\delta c$  et  $\delta\xi$  soit :

39. En effet, dans l'esprit de la théorie du contrôle, les hypothèses réalisées sont les suivantes :

1. le système  $\mathcal{P}$  n'est soumis à aucune perturbation (l'étape d'estimation n'est donc plus nécessaire),
2. les observables  $\psi_m$  sont confondues avec les états  $\phi$ .

Mis à part l'hypothèse de linéarisation sur le système  $\mathcal{P}$  qui n'est plus valide, on se retrouve précisément dans la configuration du contrôle optimal LQR ce qui explique la dénomination de contrôle optimal donnée à cette approche.

40. Nous remercions ici Alessandro Bottaro de nous avoir communiqué les articles de Gunzburger (1997a,b,c) en tout début de cette thèse.

41. Abusivement, on parle encore de variables adjointes. Une justification est donnée *a posteriori* au niveau du développement de l'équation adjointe du système optimal.

42. Ce qui est en toute rigueur faux car en réalité  $\phi$  et  $c$  sont liées par l'équation d'état  $F(\phi, c) = 0$ .

43. Par définition, la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  au point  $x_0$  dans la direction  $\delta x$  est donnée par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(x_0 + \varepsilon\delta x) - \mathcal{L}(x_0)}{\varepsilon}.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \delta c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \delta \xi = 0. \quad (2.28)$$

Ces expressions correspondent à une condition nécessaire et suffisante de détermination d'un extremum local de  $\mathcal{L}$ , en revanche elle ne constitue qu'une condition nécessaire à l'obtention d'un minimum ou d'un maximum. Ce type de méthode nous assure donc uniquement d'obtenir un extremum local mais non global. On doit donc l'utiliser en gardant à l'esprit qu'il se peut que l'algorithme d'optimisation reste piégé dans un minimum local sans aucun intérêt d'un point de vue physique. Evidemment, il serait préférable d'utiliser des méthodes d'optimisation globale comme les algorithmes génétiques (voir section C.4) mais celles-ci sont encore trop coûteuses pour qu'elles puissent être utilisées de manière courante en Mécanique des Fluides.

A partir des conditions (2.28), le système optimal associé au problème est construit en annulant successivement les dérivées de Fréchet de  $\mathcal{L}$  dans les directions  $\delta \xi$ ,  $\delta \phi$  et  $\delta c$ .

▷ **Annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant les multiplicateurs de Lagrange  $\xi$  :**

Compte tenu de la définition (2.27) de la fonctionnelle Lagrangienne  $\mathcal{L}$ , la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  dans la direction  $\delta \xi$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \delta \xi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\phi, c, \xi + \varepsilon \delta \xi) - \mathcal{L}(\phi, c, \xi)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\langle F(\phi, c), \xi + \varepsilon \delta \xi \rangle + \langle F(\phi, c), \xi \rangle}{\varepsilon} \end{aligned}$$

soit, après simplification,

$$\langle F(\phi, c), \delta \xi \rangle = 0.$$

Cette dernière égalité devant être vérifiée quelle que soit  $\delta \xi$ , on en déduit que

$$F(\phi, c) = 0 \quad (2.29)$$

ce qui correspond aux équations de contraintes  $\mathcal{F}$  du problème d'optimisation.

Ainsi, la dérivation de la fonctionnelle Lagrangienne  $\mathcal{L}$  suivant les multiplicateurs de Lagrange redonne les équations de contraintes (**équations d'état**).

▷ **Annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant les variables d'état  $\phi$  :**

Dans ce cas, la dérivée de  $\mathcal{L}$  dans la direction  $\delta \phi$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\phi + \varepsilon \delta \phi, c, \xi) - \mathcal{L}(\phi, c, \xi)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathcal{J}(\phi + \varepsilon \delta \phi, c) - \mathcal{J}(\phi, c)}{\varepsilon} - \frac{\langle F(\phi + \varepsilon \delta \phi, c), \xi \rangle - \langle F(\phi, c), \xi \rangle}{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

En considérant les développements de Taylor de  $\mathcal{J}$  et de  $F$  jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , la relation précédente devient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \delta \phi - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi, \xi \right\rangle + \mathcal{O}(1) \right) = 0,$$

soit encore plus simplement

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \delta \phi - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi, \xi \right\rangle = 0.$$

On fait alors apparaître dans le premier terme le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on trouve alors :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \delta \phi, 1 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi, \xi \right\rangle = 0,$$

soit encore en utilisant les opérateurs adjoints dénotés par  $(\cdot)^*$  :

$$\langle \delta\phi, \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}\right)^* \rangle - \langle \delta\phi, \left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^* \xi \rangle = 0.$$

Or, cette égalité doit être vérifiée quelle que soit  $\delta\phi$ , on trouve donc finalement **les équations adjointes** ou équations duales ou encore équations de co-état du problème d'optimisation :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^* \xi = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}\right)^* \quad (2.30)$$

Ces équations correspondent aux équations adjointes de l'équation d'état linéarisé autour de l'état. Elles sont donc linéaires par rapport aux variables adjointes, facilitant ainsi leur résolution. Par ailleurs, les multiplicateurs de Lagrange vérifient les équations adjointes des contraintes perturbées par un terme source issu de la fonctionnelle coût ; ceci justifie l'appellation de variables adjointes qu'on leur attribue.

▷ **Annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant les variables de contrôle  $c$  :**

La dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  dans la direction  $\delta c$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \delta c &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\phi, c + \varepsilon \delta c, \xi) - \mathcal{L}(\phi, c, \xi)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathcal{J}(\phi, c + \varepsilon \delta c) - \mathcal{J}(\phi, c)}{\varepsilon} - \frac{\langle F(\phi, c + \varepsilon \delta c), \xi \rangle - \langle F(\phi, c), \xi \rangle}{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

Des développements de Taylor de  $\mathcal{J}$  et de  $F$  jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  permettent de déterminer

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \delta c - \left\langle \frac{\partial F}{\partial c} \delta c, \xi \right\rangle = 0$$

soit encore, en faisant apparaître dans le premier terme un produit scalaire

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \delta c, 1 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial c} \delta c, \xi \right\rangle = 0$$

puis, en introduisant les opérateurs adjoints :

$$\langle \delta c, \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c}\right)^* \rangle - \langle \delta c, \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^* \xi \rangle = 0.$$

Or, cette égalité doit être vérifiée quelles que soient les variations  $\delta c$ , ce qui permet finalement de déterminer **les conditions d'optimalité** :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^* \xi = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c}\right)^* \quad (2.31)$$

Ces conditions d'optimalité sont du premier ordre et ne sont vérifiées exactement que lorsqu'un extremum de la fonctionnelle objectif est atteint.

Les conditions nécessaires (2.29), (2.30) et (2.31) forment un système couplé d'équations aux dérivées partielles appelé *système optimal*. La solution de ce système est composée des paramètres de contrôle optimaux  $c_{opt}$  que l'on recherche réellement, des variables d'état optimales  $\phi_{opt}$  et des variables adjointes optimales  $\xi_{opt}$ . Lorsque le système optimal ne comporte pas trop d'inconnues, une méthode de résolution directe (dite "*one shot method*") peut être utilisée pour obtenir sans itération la solution optimale. Malheureusement, les problèmes d'optimisation en Mécanique des Fluides comportent beaucoup trop de degrés de liberté ( $10^7$  pour le canal turbulent étudié par simulation numérique directe dans Bewley *et al.*, 2001) pour qu'une méthode directe soit utilisée. Il s'avère alors nécessaire d'avoir recours à des méthodes itératives pour lesquelles le contrôle optimal est approché pas à pas jusqu'à convergence. Cette approche peut être décrite formellement par l'algorithme suivant :

## PROCESSUS DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE

Initialisations : on pose  $n = 0$  et initialise les paramètres de contrôle à  $c^{(0)}$ .

1. Si un critère de convergence est satisfait, le processus itératif est stoppé. Les paramètres de contrôle optimaux sont  $c^{(n)}$ . Sinon
2. Détermination des variables d'état  $\phi^{(n)}$  par résolution de l'équation d'état (2.29)

$$F(\phi^{(n)}, c^{(n)}) = 0$$

3. Détermination des variables adjointes  $\xi^{(n)}$  par résolution de l'équation adjointe (2.30)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^{*^{(n)}} \xi^{(n)} = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}\right)^{*^{(n)}}.$$

4. Détermination de nouveaux paramètres de contrôle  $c^{(n+1)}$  par évaluation de la condition d'optimalité (2.31)

$$\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c}\right)^{*^{(n)}} = \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^{*^{(n)}} \xi^{(n)}.$$

5. Incrémentation :  $n = n + 1$  et retour à l'étape 1.

On peut montrer (Gunzburger, 1997a) que cette méthode itérative est équivalente à la résolution par une méthode de plus grande descente du problème d'optimisation non contraint  $\mathcal{K}(c) = \mathcal{J}(\phi(c), c)$  où  $\phi(c)$  représente l'état connu correspondant au contrôle  $c$ .

La détermination à l'étape 4 d'un nouveau contrôle peut être effectuée par une méthode itérative de type gradient qui approche pas à pas le contrôle optimal :

$$c^{(n+1)} = c^{(n)} - \omega^{(n)} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \delta c\right)^{(n)}.$$

Le paramètre de relaxation  $\omega^{(n)}$  est déterminé à l'aide d'une méthode de recherche linéaire (voir annexe C).

La deuxième classe de méthodes de résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes correspond à l'utilisation d'un algorithme d'optimisation. Par conséquent, on est obligé de déterminer le gradient de la fonctionnelle objectif à optimiser, ou au moins une approximation de celui-ci.

### 2.4.2 Approche du gradient par les sensibilités

Par application de la règle des dérivées successives d'une fonction composée, on obtient l'expression<sup>44</sup> suivante :

$$\frac{d\mathcal{J}(\phi, c)}{dc} = \frac{\partial \mathcal{J}(\phi, c)}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dc} + \frac{\partial \mathcal{J}(\phi, c)}{\partial c} \quad (2.32)$$

pour le gradient de la fonctionnelle objectif par rapport aux variables de contrôle.

Puisque la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  dépend explicitement de  $\phi$  et de  $c$  (voir § 2.2.2), les dérivées partielles  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}$  et  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c}$  seront "faciles" à calculer. En revanche, les variables d'état  $\phi$  dépendant implicitement des variables de contrôle  $c$ , les sensibilités  $\frac{d\phi}{dc}$  seront plus délicates à évaluer. En pratique, deux approches peuvent cependant être utilisées :

#### 1. Par différences finies

<sup>44</sup>. Si les paramètres de contrôle  $c$  sont multiples, il y aura une équation du type (2.32) pour chacun des paramètres de contrôle.

En effet, les sensibilités peuvent être approximées par différences finies de la manière suivante :

$$\left. \frac{d\phi}{dc} \right|_{c^{(n)}} \simeq \frac{\phi(c^{(n)}) - \phi(\tilde{c})}{c^{(n)} - \tilde{c}}$$

où les paramètres de contrôle  $\tilde{c}$  sont suffisamment proches des paramètres de contrôle  $c^{(n)}$  et où  $\phi(\tilde{c})$  est l'état solution de l'équation  $F(\phi(\tilde{c}), \tilde{c}) = 0$ . L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est assez coûteuse numériquement car il est nécessaire de résoudre l'équation d'état, qui est souvent non-linéaire, autant de fois qu'il y a de paramètres de contrôle. Par ailleurs, les gradients évalués par cette méthode manquent souvent de précision.

## 2. Par résolution de systèmes linéaires

Une autre méthode de calcul des sensibilités consiste à utiliser la relation  $F(\phi, c) = 0$ , donnée par l'équation d'état, et à la différentier. On obtient alors :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial F}{\partial c} dc = 0,$$

soit :

$$\left( \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_{c^{(n)}} \right) \left. \frac{d\phi}{dc} \right|_{c^{(n)}} = - \left. \frac{\partial F}{\partial c} \right|_{c^{(n)}}. \quad (2.33)$$

Finalement, les sensibilités sont obtenues par résolution de ce système linéaire. L'inconvénient majeur de cette approche est qu'il est nécessaire de résoudre autant<sup>45</sup> de systèmes linéaires qu'il y a de paramètres de contrôle. Cette méthode est cependant bien plus performante que l'approche par différences finies : en effet, le calcul des sensibilités se fait de manière exacte par résolution de systèmes linéaires.

### 2.4.3 Approche du gradient par l'équation adjointe

Le gradient de la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$  par rapport aux variables de contrôle  $c$  peut également être obtenu en combinant l'équation adjointe (2.30) et l'expression (2.32) donnant  $d\mathcal{J}/dc$ .

En effet, l'adjoint de l'équation (2.30) :

$$\left( \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_{c^{(n)}} \right)^* \xi = \left( \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \right|_{c^{(n)}} \right)^*$$

correspond à l'équation :

$$\xi^* \frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}. \quad (2.34)$$

En introduisant cette équation dans l'expression (2.32) du gradient de la fonctionnelle par rapport aux variables de contrôle, on obtient :

$$\frac{d\mathcal{J}(\phi, c)}{dc} = \xi^* \frac{\partial F(\phi, c)}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dc} + \frac{\partial \mathcal{J}(\phi, c)}{\partial c}.$$

Finalement, en utilisant l'équation (2.33), il devient à un itéré  $n$  quelconque :

$$\left. \frac{d\mathcal{J}}{dc}(\phi^{(n)}, c^{(n)}) \right|_{c^{(n)}} = - \left( \xi^{(n)} \right)^* \left. \frac{\partial F}{\partial c} \right|_{c^{(n)}} + \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \right|_{c^{(n)}}. \quad (2.35)$$

L'avantage de cette méthode par rapport à celle des sensibilités est qu'il faut résoudre une seule fois un système linéaire (le système adjoint 2.34) et cela indépendamment du nombre de paramètres de contrôle. On remarque également que l'adjoint de la condition d'optimalité (2.31) correspond à l'écart à zéro du gradient de la fonctionnelle coût  $d\mathcal{J}/dc$ . En d'autres termes, quand les conditions d'optimalité sont vérifiées, on a

<sup>45</sup>. On peut cependant réduire le coût de calcul lié à cette méthode en remarquant que seul le terme de droite de l'équation (2.33) dépend d'un paramètre de contrôle particulier. L'opérateur de gauche peut être discrétisé une fois pour toutes, à un itéré donné, puis utilisé pour résoudre tous les systèmes linéaires.

exactement  $d\mathcal{J}/dc = 0$ .

Connaissant maintenant le gradient de la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$  par rapport aux variables de contrôle  $c$ , celui-ci peut être utilisé dans un algorithme d'optimisation à directions de descente. Différents algorithmes à directions de descente sont discutés à l'annexe C. Seul ici est présenté le principe général de l'algorithme d'optimisation itératif à utiliser pour déterminer le contrôle optimal.

#### ALGORITHME D'OPTIMISATION

Initialisations : on pose  $n = 0$  et initialise les paramètres de contrôle à  $c^{(0)}$ .

1. Si un critère de convergence est satisfait, le processus itératif est stoppé. Les paramètres de contrôle optimaux sont  $c^{(n)}$ . Sinon
2. Détermination du gradient de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  par rapport aux variables de contrôle  $c$  :  $\frac{d\mathcal{J}}{dc}$  par la méthode des sensibilités ou celle de l'équation adjointe.
3. Détermination d'une direction de descente  $d_n$  basée sur le gradient  $\frac{d\mathcal{J}}{dc}$ .
4. Détermination de nouveaux paramètres de contrôle

$$c^{(n+1)} = c^{(n)} + \omega^{(n)}d_n$$

où le paramètre  $\omega^{(n)}$  est déterminé par recherche linéaire.

5. Incrémentation :  $n = n + 1$  et retour à l'étape 1.

#### 2.4.4 Résolution numérique : commutativité des étapes de discrétisation et de différentiation

En Mécanique des Fluides, le système optimal (équations d'état, équations adjointes, conditions d'optimalité) est habituellement constitué par des équations aux dérivées partielles qui ne possèdent pas de solutions analytiques. Il est alors nécessaire d'avoir recours au calcul numérique pour la résolution. Plus exactement, les équations mises en jeu doivent être discrétisées en temps et en espace avant d'être résolues numériquement. En pratique, on est donc confronté au choix suivant :

1. soit on utilise les équations d'état et la fonctionnelle coût sous forme continue pour déterminer les équations adjointes du problème et les conditions d'optimalité, équations qu'il reste à discrétiser pour les résoudre (**différentiation-décrétisation**),
2. soit on discrétise immédiatement les équations d'état et la fonctionnelle objectif, équations discrétisées que l'on utilise pour déterminer les équations adjointes et les conditions d'optimalité discrétisées (**décrétisation-différentiation**).

Les problèmes de Mécanique des Fluides étant des problèmes d'évolution en temps et en espace, il existe en fait une pratique intermédiaire (Chang, 2000) dans laquelle on discrétise uniquement en temps les équations d'état et la fonctionnelle coût afin de déterminer un système optimal semi-discret (discret en temps et continue en espace).

L'ensemble de ces approches est résumé sur la figure 2.8.

Le problème qui se pose en terme d'optimisation est que les étapes de différentiation-décrétisation et de discrétisation-différentiation ne sont en général pas commutatives (Gunzburger, 1997a). Elles fournissent donc *a priori* des approximations différentes pour les sensibilités conduisant éventuellement à des gradients qui n'ont aucun sens. Pour essayer d'analyser la question, une étude comparative des trois approches de discrétisation-différentiation a récemment été menée (Elskrif, 2003), en considérant pour équations d'état des modèles simples d'équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur et équation de Burgers monodimensionnelle). Malheureusement, cette étude n'a pas mis en évidence de réelles différences quant au contrôle optimal obtenu<sup>46</sup>. Pour cette raison, et parce que cette approche semi-discrete est peu employée en pratique, elle ne sera plus discutée par la suite.

46. Une des raisons est certainement la simplicité des modèles considérés.

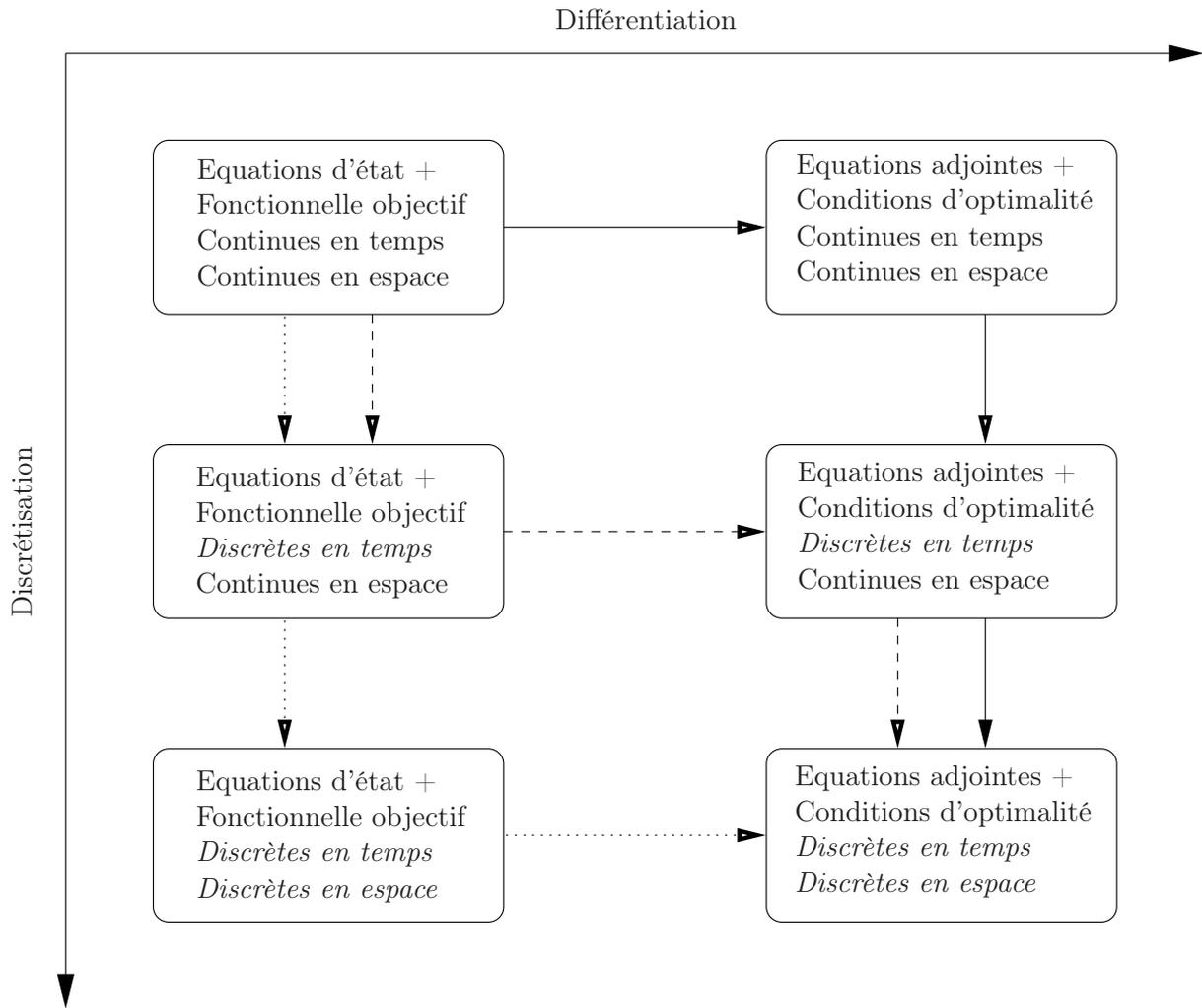


FIGURE 2.8 – Représentation schématique des différentes approches de résolution du système optimal. Discussion de la commutativité des étapes de discrétisation et de différentiation. ——— : différentiation puis discrétisations spatiale et temporelle, — — — : discrétisation temporelle, différentiation puis discrétisation spatiale, ······ : discrétisations spatiale et temporelle puis différentiation.

Les sections suivantes présentent de manière succincte les approches de discrétisation-différentiation et discrétisation-différentiation en insistant plus particulièrement sur leurs avantages et inconvénients respectifs. Une discussion plus approfondie pourra être trouvée dans Gunzburger (1997c).

#### 2.4.4.1 Discrétisation-Différentiation

Cette approche consiste à discrétiser en premier lieu les équations d'état du système à optimiser puis d'utiliser les expressions discrètes obtenues pour déterminer, via les méthodes d'optimisation non linéaire présentées jusqu'ici, les équations du système optimal discret. Des exemples d'application de cette approche sont donnés dans Elshrif (2003) et Chang (2000). L'intérêt de cette approche, dite de *différentiation à la main*, est qu'elle fournit les sensibilités exactes (aux erreurs d'arrondis près) de la solution discrète du problème d'optimisation. Cependant, ce travail de différentiation peut devenir rapidement contraignant lorsque les équations du système d'état ne sont pas simples (équation de Navier-Stokes par exemple) et les schémas de discrétisation temporelle et spatiale complexes. Par ailleurs, la différentiation doit être réalisée pour chacun des paramètres de contrôle, compliquant encore les choses. On comprend donc aisément l'attrait que peuvent avoir dans certains cercles les méthodes de *différentiation automatique*. Ces méthodes consistent à appliquer, à un code de résolution des équations d'état écrit en fortran, C ou C++, un logiciel de différentiation automatique

(ADIFOR, TAMC, FastOpt, Tapenade pour les plus connus) qui produit en sortie un autre code, écrit dans le même langage, calculant les sensibilités exactes de la solution discrétisée. Le travail de différentiation, qui devait être jusqu'ici réalisé à la main, est remplacé par une procédure automatique où l'utilisateur n'intervient plus, laissant ce soin au logiciel choisi. Cette méthode, qui paraît attractive, nécessite cependant un temps CPU beaucoup plus élevé que les méthodes de différentiation-discrétisation discutées par la suite. Par ailleurs, ces logiciels, qui sont encore au stade de développement (Di Césaré, 2000), restent délicats à mettre en œuvre, expliquant le peu d'application en Mécanique des Fluides. A notre connaissance, seuls Hinze et Slawing (2003) ont comparé, pour les équations de Navier-Stokes, les gradients obtenus par une méthode adjointe à ceux déterminés par différentiation automatique.

#### 2.4.4.2 Différentiation-discrétisation

Dans cette autre approche, les équations d'état écrites sous forme continue sont directement différenciées. On obtient alors un système optimal que l'on discrétise<sup>47</sup> pour déterminer les sensibilités. Cette approche, qui semble la plus naturelle, est par ailleurs souvent plus simple à utiliser en pratique. Pour ces raisons, c'est l'approche qui est généralement utilisée pour résoudre numériquement un problème d'optimisation sous contraintes.

#### 2.4.4.3 Discussion

Naturellement, les deux approches ci-dessus produisent des approximations des sensibilités exactes. Toutefois, si les sensibilités discrètes obtenues en différenciant les équations d'état discrétisées sont les sensibilités exactes des variables d'état discrètes, les sensibilités discrètes obtenues en discrétisant les équations du système optimal ne sont les gradients d'aucune quantité physique, continue ou discrète. Par conséquent, il est possible que l'approche par différentiation-discrétisation produise des gradients inconsistants pour la fonctionnelle objectif. Cependant, parce que c'est encore l'approche la plus simple à mettre en œuvre, c'est celle-ci qui est pour l'instant<sup>48</sup> la plus utilisée dans la littérature (Bewley *et al.*, 2001, par exemple). C'est donc cette approche, que l'on peut qualifier de standard, qui a été adoptée tout au long de ce mémoire, que ce soit pour l'exemple illustratif de la section suivante, ou que ce soit au chapitre 5 pour aborder le contrôle du sillage du cylindre.

## 2.5 Un problème modèle : l'équation de Burgers

Pour faciliter la compréhension de la théorie du contrôle optimal et préciser l'utilisation qui en sera faite dans le reste du mémoire, on considère<sup>49</sup> dans cette section un modèle simplifié des équations de Navier-Stokes : l'équation de Burgers monodimensionnelle. En effet, outre le fait que l'équation de Burgers soit suffisamment simple pour être souvent considérée comme un problème modèle, ces deux systèmes d'équations possèdent de nombreuses caractéristiques communes : diffusion visqueuse, convection non linéaire, couches limites.

Après avoir défini le problème d'optimisation à la section 2.5.1, on utilisera la méthode des multiplicateurs de Lagrange présentée à la section 2.4.1 pour effectuer la résolution. Enfin, on présentera à la section 2.5.3 quelques résultats numériques qui permettent de valider toute la procédure de résolution.

### 2.5.1 Définition du problème d'optimisation

L'équation de Burgers monodimensionnelle s'écrit sous forme conservative

$$\mathcal{L}_B(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Phi = 0 \quad (2.36)$$

47. Il est en général conseillé d'utiliser les mêmes schémas de discrétisation que ceux mis en œuvre pour résoudre les équations du système d'état (Elsharif, 2003, par exemple).

48. Quand les méthodes de différentiation automatique seront réellement arrivées à maturité alors cette situation changera, permettant ainsi d'éviter d'éventuelles inconsistances des gradients.

49. Cet exemple est inspiré de travaux réalisés dans le groupe de Scott Collis à l'université de Rice (Chang, 2000; Chen et Collis, 2003).

où  $\Phi$  représente un terme de contrôle distribué.

L'équation (2.36) sera résolue dans le domaine  $\mathcal{D}$  défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, t) \in [0, L] \times [0, T]\}$$

et sera munie de la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.37)$$

ainsi que des conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \phi_L \\ u(L, t) &= \phi_R \end{aligned} \quad (2.38)$$

où  $\phi_L$  et  $\phi_R$  représentent des termes de contrôle frontière.

Dans cet exemple, l'objectif du contrôle est d'optimiser la fonctionnelle coût définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, \Phi, \phi_L, \phi_R) &= \frac{\omega_1}{2} \int_0^T \int_0^L (u - \hat{u})^2 dx dt + \frac{\omega_2}{2} \int_0^L [u(x, T) - \bar{u}(x)]^2 dx \\ &+ \frac{\ell}{2} \int_0^T \int_0^L \Phi^2 dx dt + \frac{\ell_1}{2} \int_0^T \phi_L^2 dt + \frac{\ell_2}{2} \int_0^T \phi_R^2 dt. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dans cette expression, les fonctions<sup>50</sup>  $\hat{u}$  et  $\bar{u}$  représentent d'une part la consigne à atteindre sur tout le domaine et à tout instant et d'autre part la consigne à atteindre au temps  $T$ . Cette fonctionnelle est de type énergétique et fait apparaître sur la première ligne l'énergie de l'écart aux consignes et sur la seconde ligne un terme de régularisation (voir § 2.2.2) correspondant au coût du contrôle.

Formellement, le problème d'optimisation à résoudre peut s'énoncer de la manière suivante :

*Déterminer les variables d'état  $u$  et les paramètres de contrôle  $\Phi$ ,  $\phi_L$  et  $\phi_R$ , tels que la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$  soit minimale sous les contraintes (2.36), (2.37) et (2.38).*

Ce problème d'optimisation sous contraintes rentre donc dans le cadre de la section 2.2 et la méthode des multiplicateurs de Lagrange présentée à la section 2.4.1 peut donc être utilisée.

## 2.5.2 Résolution du problème d'optimisation

Afin de transformer le problème d'optimisation sous contraintes énoncé précédemment en un problème d'optimisation sans contrainte, on introduit alors les multiplicateurs de Lagrange  $u^*$ ,  $\xi_L^*$  et  $\xi_R^*$  pour chacune des contraintes actives<sup>51</sup> du problème, respectivement l'équation d'état (2.36) et les conditions aux limites (2.38). On introduit alors la fonctionnelle de Lagrange sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \Phi, \phi_L, \phi_R, u^*, \xi_L^*, \xi_R^*) &= \mathcal{J}(u, \Phi, \phi_L, \phi_R) \\ &- \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Phi, u^* \right\rangle_{\mathcal{D}} \\ &- \langle u(0, t) - \phi_L, \xi_L^* \rangle_t - \langle u(L, t) - \phi_R, \xi_R^* \rangle_t \end{aligned}$$

où les produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  sont respectivement définis comme :

$$\langle a, b \rangle_{\mathcal{D}} = \int_0^T \int_0^L ab dx dt \quad \text{et} \quad \langle a, b \rangle_t = \int_0^T ab dt.$$

50. Attention, dans cette section, la notation  $\hat{\cdot}$  ne représente plus une grandeur estimée comme c'était le cas à la section 2.3.1.

51. Il est inutile d'associer un multiplicateur de Lagrange à la contrainte constituée par la condition initiale (2.37) car ses variations sont identiquement nulles.

Sous forme développée, la fonctionnelle  $\mathcal{L}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \Phi, \phi_L, \phi_R, u^*, \xi_L^*, \xi_R^*) &= \frac{\omega_1}{2} \int_0^T \int_0^L (u - \hat{u})^2 dx dt + \frac{\omega_2}{2} \int_0^L [u(x, T) - \bar{u}(x)]^2 dx \\ &+ \frac{\ell}{2} \int_0^T \int_0^L \Phi^2 dx dt + \frac{\ell_1}{2} \int_0^T \phi_L^2 dt + \frac{\ell_2}{2} \int_0^T \phi_R^2 dt \\ &- \int_0^T \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Phi \right) u^* dx dt \\ &- \int_0^T (u(0, t) - \phi_L) \xi_L^* dt - \int_0^T (u(L, t) - \phi_R) \xi_R^* dt. \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation sans contrainte s'énonce alors :

*Déterminer les variables d'état  $u$ , les variables de contrôle  $\Phi$ ,  $\phi_L$  et  $\phi_R$  et les multiplicateurs de Lagrange  $u^*$ ,  $\xi_L^*$  et  $\xi_R^*$  telles que la fonctionnelle de Lagrange  $\mathcal{L}$  présente un extremum.*

La fonctionnelle Lagrangienne  $\mathcal{L}$  admet un extremum lorsque  $\mathcal{L}$  est rendue "stationnaire" par rapport à chacun de ses arguments. En effet, le calcul des variations impose alors  $\delta\mathcal{L} = 0$ , soit :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} \delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_L} \delta\phi_L + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_R} \delta\phi_R + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^*} \delta u^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_L^*} \delta\xi_L^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_R^*} \delta\xi_R^* = 0.$$

Les arguments de la fonctionnelle  $\mathcal{L}$  étant supposés<sup>52</sup> indépendants les uns des autres, la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  doit donc être identiquement nulle dans toutes les directions admissibles et quelles que soient les variations considérées. Par conséquent, on a :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} \delta u = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} \delta\Phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_L} \delta\phi_L = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_R} \delta\phi_R = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^*} \delta u^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_L^*} \delta\xi_L^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_R^*} \delta\xi_R^* = 0.$$

L'annulation des dérivées de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant les variables adjointes  $u^*$ ,  $\xi_L^*$  et  $\xi_R^*$  redonne immédiatement les équations d'état (2.36) et (2.38). Les autres équations du système optimal, équations adjointes et conditions d'optimalité, sont respectivement déterminées en annulant les dérivées de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant les variables d'état  $u$ , et suivant les paramètres de contrôle  $\Phi$ ,  $\phi_L$  et  $\phi_R$ .

#### ▷ Annulation de la dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables d'état $u$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} \delta u &= \omega_1 \int_0^T \int_0^L (u - \hat{u}) \delta u dx dt + \omega_2 \int_0^L [u(x, T) - \bar{u}(x)] \delta u(x, T) dx \\ &- \int_0^T \int_0^L \left( \underbrace{\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}}_I + \delta u \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{u \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}}_{II} - \nu \underbrace{\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2}}_{III} \right) u^* dx dt - \int_0^T \delta u(0, t) \xi_L^* dt - \int_0^T \delta u(L, t) \xi_R^* dt = 0. \end{aligned}$$

Pour faire apparaître l'équation adjointe  $\mathcal{L}_B^*(u^*) = 0$  de l'équation de Burgers, il reste à intégrer par parties l'expression précédente afin de l'écrire sous la forme :

$$\langle \delta u, \mathcal{L}_B^*(u^*) \rangle + \text{termes de frontière} + \text{termes de contrôle} \quad (2.40)$$

Après intégration par parties, on trouve pour les différents termes les expressions suivantes :

#### ◊ Contribution du terme $I$

$$- \int_0^T \int_0^L \frac{\partial(\delta u)}{\partial t} u^* dx dt = - \int_0^L [\delta u u^*]_0^T dx + \int_0^T \int_0^L \delta u \frac{\partial u^*}{\partial t} dx dt.$$

<sup>52</sup>. On rappelle que cette hypothèse est en toute rigueur fautive car les variables d'état et les variables de contrôle sont liées par les contraintes (2.36) et (2.38).

◇ Contribution du terme  $II$

$$-\int_0^T \int_0^L u u^* \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx dt = -\int_0^T [\delta u u u^*]_0^L dt + \int_0^T \int_0^L \delta u \left( u \frac{\partial u^*}{\partial x} + u^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt.$$

◇ Contribution du terme  $III$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \nu \frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2} u^* dx dt &= \nu \int_0^T \left[ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} u^* \right]_0^L dt - \nu \int_0^T \int_0^L \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx dt \\ &= \nu \int_0^T \left[ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} u^* \right]_0^L dt - \nu \int_0^T \left[ \delta u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right]_0^L dt + \nu \int_0^T \int_0^L \delta u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx dt. \end{aligned}$$

soit encore, en regroupant les termes comme il est indiqué à l'équation (2.40) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u &= \int_0^T \int_0^L \delta u \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} + u \frac{\partial u^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \omega_1(u - \hat{u}) \right) dx dt \\ &+ \int_0^L \delta u(x, T) (\omega_2[u(x, T) - \bar{u}(x)] - u^*(x, T)) dx - \int_0^L \delta u(x, 0) u^*(x, 0) dx \\ &+ \int_0^T \delta u(0, t) \left( u(0, t) u^*(0, t) + \nu \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{x=0} - \xi_L^* \right) dt \\ &- \int_0^T \delta u(L, t) \left( u(L, t) u^*(L, t) + \nu \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{x=L} + \xi_R^* \right) dt \\ &- \nu \int_0^T \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \Big|_{x=0} u^*(0, t) dt + \nu \int_0^T \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \Big|_{x=L} u^*(L, t) dt = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation doit être vérifiée quelle que soit la perturbation  $\delta u$ , on peut donc considérer successivement les cas suivants :

–  $\delta u \neq 0$  et tous les autres facteurs variationnels supposés nuls, on obtient alors l'équation adjointe :

$$-\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = \omega_1(u - \hat{u}). \quad (2.41)$$

Contrairement à l'équation de Burgers (2.36), cette équation est parabolique dans le sens des  $t$  décroissant. Pour que le problème soit bien posé, il faudra donc la munir d'une condition terminale.

–  $\delta u(x, T) \neq 0$  et tous les autres facteurs variationnels supposés nuls, on obtient ainsi la condition terminale du problème adjoint :

$$u^*(x, T) = \omega_2[u(x, T) - \bar{u}(x)]. \quad (2.42)$$

–  $\frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \Big|_{x=0} \neq 0$  et tous les autres facteurs variationnels supposés nuls, on obtient alors la condition au limite gauche du problème adjoint :

$$u^*(0, t) = 0. \quad (2.43)$$

–  $\frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \Big|_{x=L} \neq 0$  et tous les autres facteurs variationnels supposés nuls, on obtient cette fois la condition au limite droite du problème adjoint :

$$u^*(L, t) = 0. \quad (2.44)$$

–  $\delta u(0, t) \neq 0$  et tous les autres facteurs variationnels supposés nuls, on obtient la relation :

$$\xi_L^* = \nu \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (2.45)$$

– Finalement,  $\delta u(L, t) \neq 0$  et tous les autres facteurs variationnels supposés nuls, on obtient la relation :

$$\xi_R^* = -\nu \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{x=L}. \quad (2.46)$$

▷ **Annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant la variable de contrôle distribué  $\Phi$  :**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi = \int_0^T \int_0^L \delta \Phi (\ell \Phi + u^*) dx dt = 0.$$

Cette équation devant être vérifiée quelle que soit la perturbation  $\delta \Phi$ , il faut qu'elle le soit dans le cas particulier où  $\delta \Phi \neq 0$ . Nécessairement, on a alors :

$$\ell \Phi + u^* = 0.$$

Cette condition est vérifiée exactement lorsque le minimum de la fonctionnelle est atteint. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut considérer que le gradient de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  par rapport au terme de contrôle distribué  $\Phi$  est donné par :

$$\nabla_{\Phi} \mathcal{J} = \ell \Phi + u^*. \quad (2.47)$$

▷ **Annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant la variable de contrôle de frontière gauche  $\phi_L$  :**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_L} \delta \phi_L = \int_0^T \delta \phi_L (\ell_1 \phi_L + \xi_L^*) dt = 0.$$

De même, cette relation doit être vérifiée quelle que soit la variation  $\delta \phi_L$ . On peut donc choisir de considérer le cas  $\delta \phi_L \neq 0$ . On obtient alors à l'aide de la relation (2.45)

$$\ell_1 \phi_L + \xi_L^* = \ell_1 \phi_L + \nu \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$$

lorsque le minimum est atteint. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut considérer que le gradient de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  par rapport à  $\phi_L$  est donné par :

$$\nabla_{\phi_L} \mathcal{J} = \ell_1 \phi_L + \nu \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

▷ **Annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant la variable de contrôle de frontière droite  $\phi_R$  :**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_R} \delta \phi_R = \int_0^T \delta \phi_R (\ell_2 \phi_R + \xi_R^*) dt = 0.$$

Là encore, cette relation doit être vérifiée quelle que soit la variation  $\delta \phi_R$ . En considérant le cas où  $\delta \phi_R \neq 0$ , on obtient, en utilisant la relation (2.46) :

$$\ell_2 \phi_R + \xi_R^* = \ell_2 \phi_R - \nu \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

lorsque le minimum est atteint. Lorsque le minimum n'est pas atteint, on peut considérer que le gradient de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  par rapport à  $\phi_R$  est donné par :

$$\nabla_{\phi_R} \mathcal{J} = \ell_2 \phi_R - \nu \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_{x=L}.$$

Lorsque le minimum de  $\mathcal{J}$  est atteint, les gradients  $\nabla_{\Phi} \mathcal{J}$ ,  $\nabla_{\phi_L} \mathcal{J}$  et  $\nabla_{\phi_R} \mathcal{J}$  sont tous nuls. Pour cette raison, on nomme ces équations conditions d'optimalité.

La figure 2.5.2 présente en résumé le système optimal : équation d'état, équation adjointe et conditions d'optimalité obtenues dans l'approche retenue ici *i.e.* par différentiation puis discrétisation. Pour obtenir numériquement une solution à ce problème d'équations aux dérivées partielles, il reste à discrétiser en temps et en espace ce système, c'est ce qui sera fait à la section suivante dans un cas plus particulier que celui évoqué jusqu'ici.

EQUATION D'ÉTAT :

$$\mathcal{L}_B(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Phi = 0$$

$$u(0,t) = \phi_L \quad (\text{CL})$$

$$u(L,t) = \phi_R \quad (\text{CL})$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (\text{CI})$$

EQUATION ADJOINTE :

$$\mathcal{L}_B^*(u^*) = -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \omega_1 (u - \hat{u}) = 0$$

$$u^*(0,t) = 0 \quad (\text{CL})$$

$$u^*(L,t) = 0 \quad (\text{CL})$$

$$u^*(x,T) = \omega_2 (u(x,T) - \bar{u}(x)) \quad (\text{CT})$$

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ :

$$\nabla_{\Phi} \mathcal{J} = \ell \Phi + u^*$$

$$\nabla_{\phi_L} \mathcal{J} = \ell_1 \phi_L + \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(0,t)$$

$$\nabla_{\phi_R} \mathcal{J} = \ell_2 \phi_R - \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(L,t)$$

FONCTIONNELLE COÛT :

$$\mathcal{J} = \frac{\omega_1}{2} \int_0^T \int_0^L (u - \hat{u})^2 dx dt + \frac{\omega_2}{2} \int_0^L [u(x,T) - \bar{u}(x)]^2 dx + \frac{\ell}{2} \int_0^T \int_0^L \Phi^2 dx dt + \frac{\ell_1}{2} \int_0^T \phi_L^2 dt + \frac{\ell_2}{2} \int_0^T \phi_R^2 dt$$

FIGURE 2.9 – Système optimal de l'équation de Burgers obtenu par l'approche différentiation discrétisation. CL : condition limite, CI : condition initiale, CT : condition terminale.

### 2.5.3 Résultats numériques

Afin de valider les développements de la section précédente, et de démontrer ainsi numériquement l'efficacité de la théorie du contrôle optimal à résoudre un système d'optimisation sous contraintes, nous considérons l'équation de Burgers (2.36) dans le domaine  $\mathcal{D} = \{(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$ . L'objectif est de contrôler cette équation par seul<sup>53</sup> contrôle distribué. Par conséquent, on considérera par la suite que les conditions aux limites (2.38) sont données par  $\phi_L = \phi_R = 0$ .

Dans cette application, nous choisissons pour condition initiale de l'équation d'état, le même profil que celui considéré dans les travaux de Chang (2000), soit :

$$u_0(x) = \sin\left(\pi \frac{\tan(c_s(2x-1))}{\tan(c_s)}\right) \quad (2.48)$$

où  $c_s$  est un coefficient permettant de resserrer localement le maillage près des frontières du domaine pour mieux décrire les couches limites.

Par ailleurs, nous considérons pour fonctionnelle  $\mathcal{J}$  à optimiser :

$$\mathcal{J}(u, \Phi) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u - u_0)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 [u(x, 1) - u_0]^2 dx + \frac{\ell}{2} \int_0^1 \int_0^1 \Phi^2 dx dt. \quad (2.49)$$

Cette fonctionnelle peut être vue comme un cas particulier de la fonctionnelle (2.39) pour lequel on aurait imposé :

$$T = 1; L = 1; \hat{u} = u_0; \bar{u} = u_0; \ell_1 = 0; \ell_2 = 0; \omega_1 = 1; \omega_2 = 1$$

ce qui nous permet d'utiliser immédiatement tous les résultats de la section 2.5.2.

Dans cette étude de validation, le coût lié au contrôle n'est pas une priorité dans le processus d'optimisation. Néanmoins, pour que le problème soit bien posé, on considérera le paramètre de régularisation  $\ell$  différent de zéro. Plus précisément, on a pris  $\ell = 10^{-4}$  dans toutes les simulations. Par ailleurs, l'équation d'état (2.36) et l'équation adjointe (2.41) ont été discrétisés en temps par une méthode de Runge-Kutta à l'ordre 3 (Williamson, 1980) et en espace par des schémas différences finies centrés d'ordre 2. Finalement, le coefficient du terme diffusif a été fixé à  $\nu = 0,01$ .

Une fois évalué le gradient de la fonctionnelle objectif par la relation (2.47), celui-ci est utilisé dans un algorithme de gradient conjugué de type Fletcher-Reeves couplé à une recherche linéaire d'Armijo à rebroussement (voir annexe C). Dans cette étude, on a considéré que la méthode itérative de résolution était arrivée à convergence lorsque le critère  $\|\nabla_{\Phi} \mathcal{J}\| < 10^{-5}$  était satisfait.

---

<sup>53</sup>. Chen et Collis (2003) considèrent le cas plus général où le contrôle est recherché sous la forme d'un contrôle distribué et aux frontières *i.e.*  $\phi_L$  et  $\phi_R$  différents de zéro.

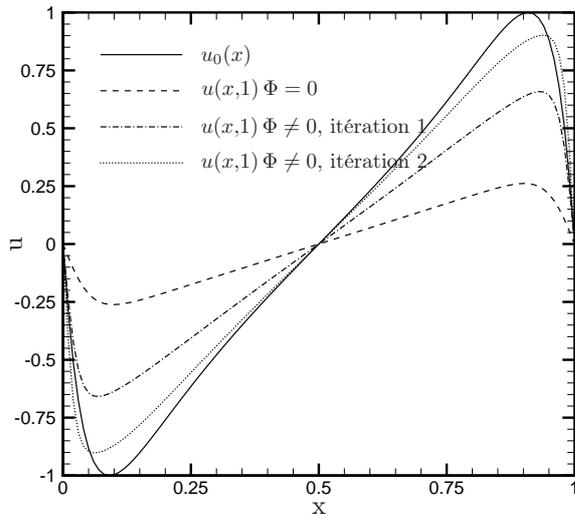


FIGURE 2.10 – Résultats du contrôle distribué de l'équation de Burgers. Initialisation et consigne données par l'équation (2.48).

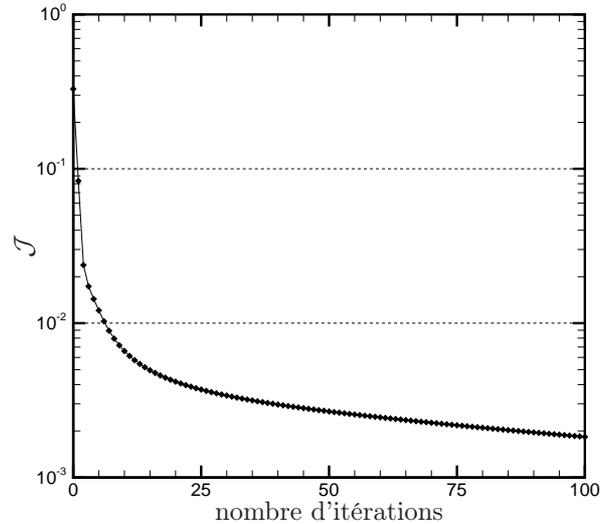


FIGURE 2.11 – Evolution en fonction du nombre d'itérations de la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$ .

La figure 2.10 représente par comparaison avec  $u_0$ , champ de vitesse initiale et consigne du contrôle donné par l'équation (2.48), les profils  $u(x, t = 1)$ , solutions de l'équation de Burgers, dans le cas où un contrôle n'est pas appliqué ( $\Phi = 0$ ) et dans le cas où le contrôle est appliqué ( $\Phi \neq 0$ ). On constate sur cette figure qu'au bout de deux itérations du processus d'optimisation, la solution contrôlée de l'équation de Burgers converge bien vers la consigne<sup>54</sup>. L'évolution de la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$ , en fonction du nombre d'itérations du processus d'optimisation, est présentée sur la figure 2.11. La valeur de la fonctionnelle objectif diminue très fortement en fonction des itérations, passant d'une valeur égale à 0,33 au début du processus itératif à une valeur égale à  $1,5 \cdot 10^{-3}$  après convergence<sup>55</sup>. La valeur minimale de la fonctionnelle objectif correspond donc à moins de 0,5% de sa valeur initiale.

Les figures 2.12, 2.13 et 2.14 représentent le même type d'information que la figure 2.10, soit respectivement la consigne  $u_0$ , la solution  $u$  non contrôlée ( $\Phi = 0$ ) et la solution  $u_{opt}$  du problème de contrôle optimal mais en coordonnées espace-temps au lieu que ce soit uniquement pour  $t = 1$ . On constate que le profil de la solution optimale est très proche du profil cible  $u_0$ , permettant ainsi de valider numériquement toute l'approche.

Finalement, nous avons représenté sur la figure 2.15 en coordonnées espace-temps, le contrôle distribué optimal  $\Phi_{opt}(x, t)$ . L'amplitude du contrôle optimal augmente assez fortement lorsque le temps  $t = 1$  est approché. Ce résultat s'explique par le fait que l'objectif est double à  $t = 1$  (voir fonctionnelle 2.49).

54. Pour un nombre d'itération du processus d'optimisation égal à 20, on trouve, comme on s'y attendait, que la solution contrôlée est pratiquement confondue avec la consigne.

55. Pour le critère de convergence retenu dans cette étude, la convergence est obtenue après 100 itérations.

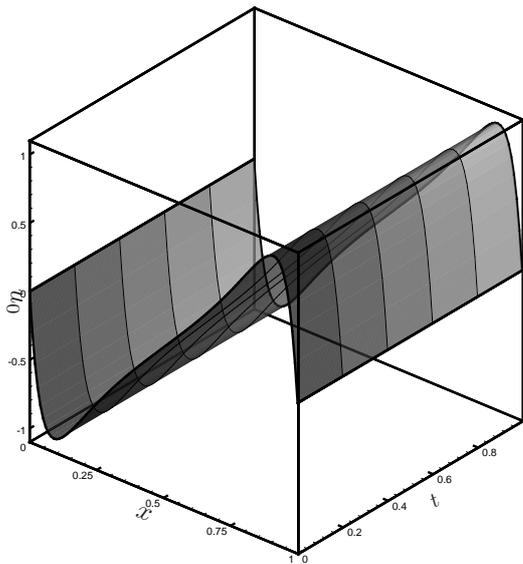


FIGURE 2.12 – Représentation en coordonnées espace-temps du profil de la consigne  $u_0(x)$ .

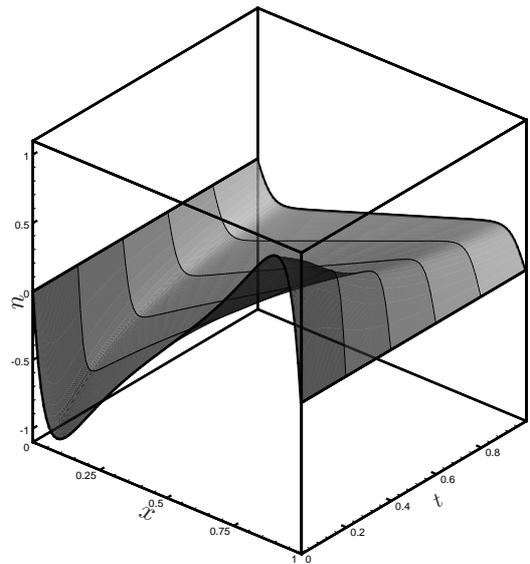


FIGURE 2.13 – Représentation en coordonnées espace-temps du profil  $u(x, t)$  obtenu pour  $\Phi = 0$ .

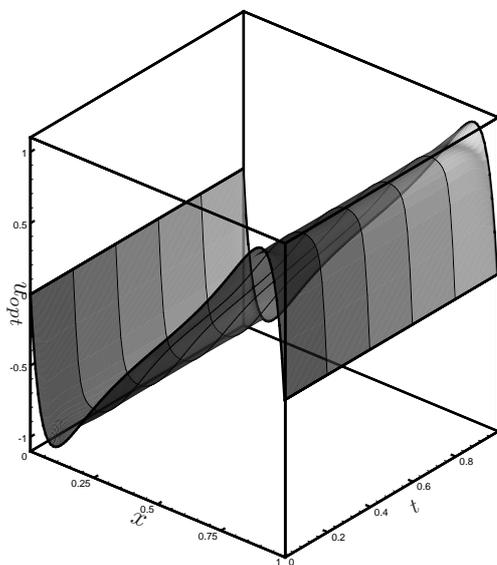


FIGURE 2.14 – Représentation en coordonnées espace-temps du profil optimal  $u_{\text{opt}}(x, t)$ .

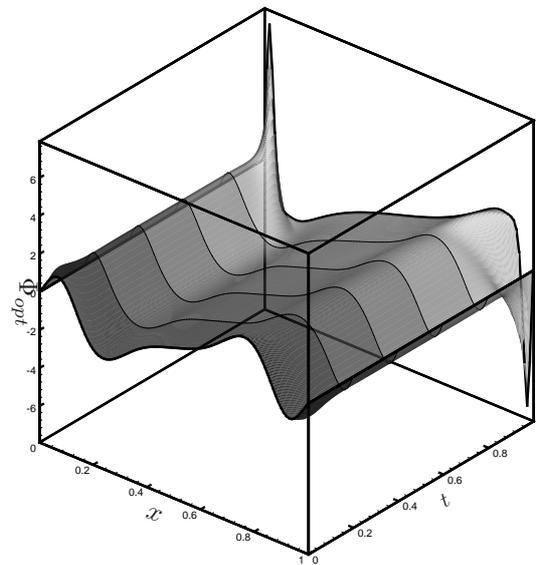


FIGURE 2.15 – Représentation en coordonnées espace-temps du contrôle distribué optimal  $\Phi_{\text{opt}}(x, t)$ .

