

Chapitre 5

Contrôle optimal d'un modèle réduit du sillage d'un cylindre circulaire

Sommaire

5.1	Introduction	133
5.2	Modèle réduit du sillage d'un cylindre circulaire	135
5.3	Approche contrôle optimal	136
5.3.1	Système optimal réduit	136
5.3.2	Résolution du système optimal réduit	137
5.4	Loi de contrôle obtenue par le système réduit POD	139
5.4.1	Influence du contrôle sur la base POD	139
5.4.2	Fonctions de base POD généralisées	139
5.4.3	Résultats du contrôle optimal par système réduit POD	141
5.4.4	Réduction de traînée obtenue par les équations de Navier-Stokes	143
5.4.5	Discussion	145
5.5	Conclusions	147

5.1 Introduction

L'approche par contrôle optimal a récemment reçu un regain d'intérêt pour contrôler l'écoulement de sillage par rotation sinusoïdale (He *et al.*, 2000; Homescu *et al.*, 2002; Protas et Styczek, 2002). Dans ces études, les équations de Navier-Stokes sont utilisées comme équations d'état dans la résolution du système optimal. Un des aspects attractifs de la théorie du contrôle optimal est l'introduction d'une fonction de coût qui fournit une mesure quantitative de l'objectif à réaliser par le contrôle. Toutefois, les coûts numériques associés à ce type d'approche étant très importants, notamment en terme de mémoire, la résolution d'un problème d'optimisation contraint par les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles est très peu abordée dans la littérature. Dans cette optique, une méthode intéressante pour réduire les coûts de calcul est d'optimiser de manière exacte un modèle d'ordre réduit de dynamique (lire Alexandrov *et al.*, 1997, pour une discussion sur l'utilisation de modèles réduits dans des algorithmes d'optimisation). L'objectif de ce chapitre, est de démontrer qu'une méthode de contrôle optimal faisant intervenir un modèle réduit de dynamique construit par Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD ROM) pour équations d'état, est utilisable pour réduire par rotation instationnaire la traînée d'un cylindre circulaire.

Dans leurs travaux, He *et al.* (2000) ont observé que l'application du contrôle qui minimise la traînée générerait des vortex moins énergétiques que ceux engendrés par un cylindre non manipulé. La caractérisation énergétique de la solution semble donc jouer un rôle primordial. En ce sens, l'optimalité énergétique des fonctions propres POD, paraît bien adaptée pour construire un modèle réduit de dynamique du système Navier-Stokes (voir chapitre 4), utilisable par la suite comme équation d'état d'un problème de contrôle optimal. Malheureusement, pour les raisons évoquées au chapitre , la représentativité d'un système dynamique

d'ordre réduit construit par POD est *a priori* limitée à un voisinage proche, dans l'espace des paramètres de contrôle, du régime dynamique associé aux réalisations de la base de données POD.

Lorsque la base POD (et par conséquent le modèle réduit de dynamique) ne seront pas réactualiser au cours du processus d'optimisation, comme c'est le cas dans ce chapitre, on conviendra¹ de parler de *contrôle en boucle ouverte*. Dans ce cas, il est alors nécessaire d'améliorer la robustesse du modèle réduit en construisant une base POD susceptible de représenter l'ensemble des dynamiques que pourra subir l'écoulement forcé pendant la procédure d'optimisation (voir figure 2(b)). Pour générer ces réalisations, une procédure consiste à exciter l'écoulement de manière *ad-hoc* avec un signal le plus riche possible en amplitude et en fréquence (Graham *et al.*, 1999a,b; Gunzburger, 2004). Les fonctions POD correspondantes sont généralement dénommées *fonctions propres généralisées*. Ainsi, Graham *et al.* (1999a,b) introduisent une excitation variant en fréquence pour une amplitude fixée et obtiennent des résultats convaincants. Cependant, ils montrent qu'avec une excitation de ce type la représentativité du modèle réduit décroît en fonction du temps, ce qui suggère qu'une modification de la forme de l'excitation serait nécessaire (voir § 5.4.2).

La méthode d'optimisation utilisée dans ce chapitre est représentée de manière schématique sur la figure 5.1 où γ_e représente l'excitation temporelle utilisée pour générer les fonctions propres généralisées.

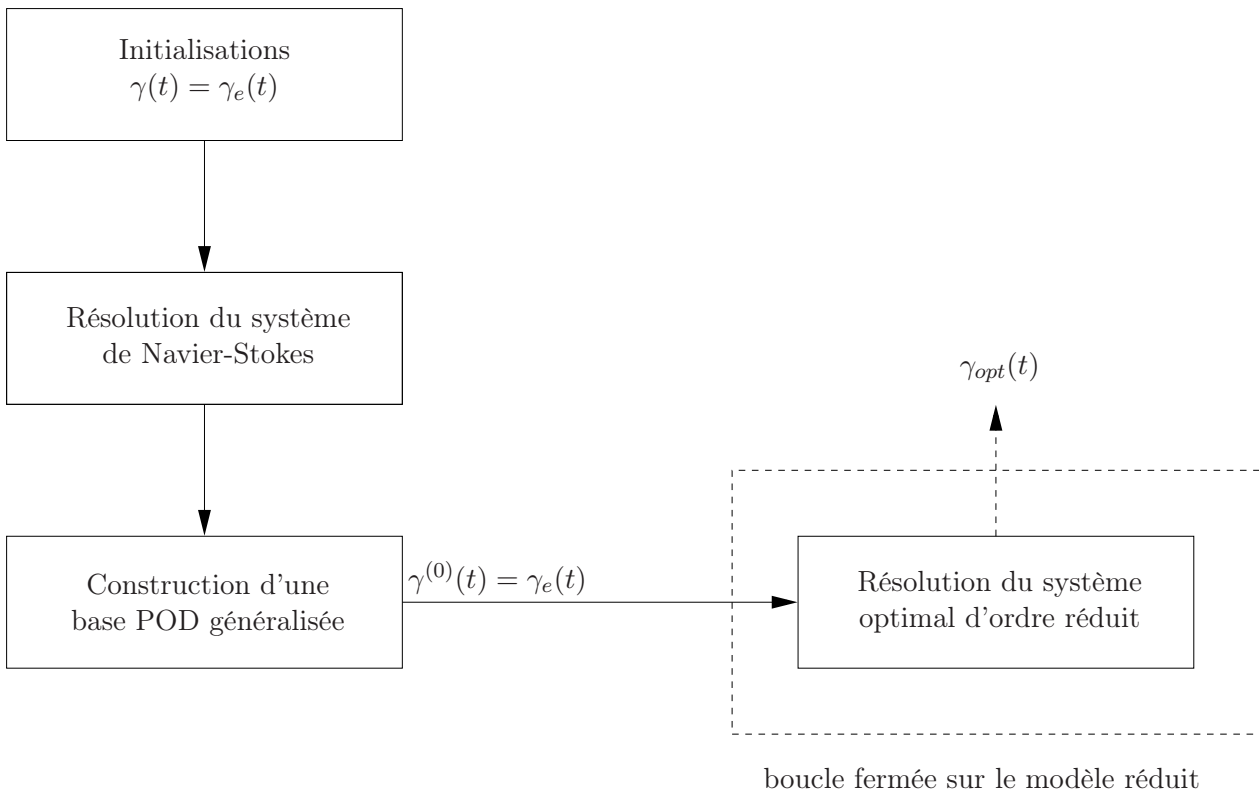


FIGURE 5.1 – Représentation schématique de la méthode d'optimisation POD en boucle ouverte.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : la section 5.2 rappelle brièvement le modèle réduit POD de l'écoulement de cylindre contrôlé développé à la section 4.3.2. Au paragraphe 5.3, l'approche par contrôle optimal, utilisée pour résoudre le problème d'optimisation avec contraintes, est décrite : la fonction objectif et les multiplicateurs de Lagrange y sont introduits. Le paragraphe 5.4 présente les résultats issus du couplage

1. Les termes "boucles fermées" et "boucles ouvertes" sont finalement assez ambigus car ils dépendent du système d'observation. En effet, dans ce chapitre, le contrôle est en boucle ouverte par rapport au système de Navier-Stokes, car nous n'aurons pas recours à lui pendant le processus d'optimisation (figure 5.1). Cependant, le modèle réduit POD est réactualisé, et donc le processus de contrôle est en boucle fermée sur le modèle réduit. Par opposition, aux chapitres 6 et 7, on parlera de *contrôle en boucle fermée* car il sera fait appel de manière régulière au système Navier-Stokes pendant le processus de résolution afin de déterminer une nouvelle base de données POD.

contrôle optimal et modèle réduit POD. Le paragraphe 5.4.2 décrit la méthode utilisée ici pour déterminer des fonctions propres généralisées. Finalement, au paragraphe 5.4.4, nous évaluons la réduction de traînée effective que peut produire la loi de contrôle déterminée au paragraphe 5.4.3, lorsque celle-ci est utilisée pour résoudre le système Navier-Stokes.

5.2 Modèle réduit du sillage d'un cylindre circulaire

Ce paragraphe a uniquement pour ambition de rappeler au lecteur, la démarche générale utilisée à la section 4.3.2 pour développer le modèle réduit de dynamique du cylindre contrôlé (5.2a) qui sera utilisé dans les sections suivantes comme équation d'état du système optimal.

Lorsque le contrôle instationnaire est appliqué au cylindre, les conditions aux limites ne sont plus homogènes. Par conséquent, les fonctions de base POD de l'écoulement non contrôlé ne sont plus adaptées pour une projection de Galerkin. Afin de déterminer des fonctions de base homogènes, la *méthode de la fonction de contrôle*, introduite dans Graham *et al.* (1999a), est appliquée. Le champ de vitesse s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) \\ &= \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a_k(t) \Phi_k(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (5.1)$$

où $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ est le champ de vitesse moyen calculé par moyenne d'ensemble sur les réalisations de la base de données POD et où $\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$ est un champ de vitesse vérifiant des conditions aux limites homogènes sur le cylindre. Une méthode simple pour l'évaluer est de considérer le champ de vitesse généré pour $\gamma = 1$ sur le cylindre et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur les autres frontières du domaine.

La forme faible des équations de Navier-Stokes est alors restreinte au sous-espace des fonctions propres POD $\mathcal{S}_{POD}^{N_{gal}}$ déterminé par les N_{gal} premières fonctions propres spatiales Φ_i . L'optimalité énergétique des fonctions de base suggère qu'un faible nombre de modes POD est suffisant pour représenter de manière satisfaisante une réalisation quelconque de l'écoulement. La dimension $N_{gal} \ll N_{POD}$ du sous espace $\mathcal{S}_{POD}^{N_{gal}}$ est déterminée comme le plus petit entier M tel que l'énergie relative $\frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i}{\sum_{i=1}^{N_{POD}} \lambda_i}$ soit supérieure à un pourcentage prédéfini $\delta\%$ (pour l'écoulement non contrôlé, $M = N_{gal} = 6$ pour $\delta = 99,9$).

Finalement, un modèle d'ordre réduit représentatif de l'écoulement contrôlé autour du cylindre peut être obtenu :

$$\begin{aligned}\frac{d a_i(t)}{d t} &= \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ &+ \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{d t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma + \mathcal{G}_i \gamma^2.\end{aligned}\quad (5.2a)$$

Les coefficients \mathcal{A}_i , \mathcal{B}_{ij} , \mathcal{C}_{ijk} , \mathcal{D}_i , \mathcal{E}_i , \mathcal{F}_{ij} et \mathcal{G}_i dépendent uniquement de Φ , \mathbf{u}_m , \mathbf{u}_c et du nombre de Reynolds Re . Leurs expressions sont données à la section 4.3.2.

Les équations (5.2a) sont intégrées en temps par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à partir des conditions initiales

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})), \quad i = 1, \dots, N_{gal} \quad (5.2b)$$

ce qui donne des coefficients temporels $a_i(t)$ de prédiction qui peuvent être comparés aux coefficients de projection issus de la simulation numérique.

En raison de la troncature effectuée lors de la projection de Galerkin, les modes d'ordre élevé, qui correspondent aux échelles dissipatives de l'écoulement, ne sont pas résolus par le modèle réduit POD. Lors de

l'intégration temporelle des équations (5.2a), des instabilités numériques peuvent apparaître après quelques périodes de résolution. Ce problème est comparable à celui rencontré en simulation aux grandes échelles où il est nécessaire de modéliser les échanges énergétiques dans l'espace de Fourier. Ici, la modélisation des modes d'ordre élevé, non pris en compte de manière explicite dans l'équation (5.2a), est effectuée en rajoutant sur chaque mode des viscosités artificielles calculées de manière optimale. Cette méthode est décrite à la section 4.4.2.

Après stabilisation des modes POD, une excellente concordance est obtenue entre les coefficients temporels prédits par le système (5.2) et ceux obtenus par projection des fonctions propres POD sur les résultats de simulation numérique (§ 4.4.2).

5.3 Approche contrôle optimal

5.3.1 Système optimal réduit

Cette section décrit comment il est possible de déterminer la loi de contrôle $\gamma(t)$ par application de la théorie du contrôle optimal. L'idée de cette approche repose sur la minimisation d'une fonctionnelle objectif \mathcal{J} sur une période T correspondant à quelques périodes de décrochement tourbillonnaire. Par construction, la fonction objectif \mathcal{J} incorpore la quantité à optimiser et le coût nécessaire pour y parvenir. La dynamique de l'écoulement généré par une évolution γ quelconque de la vitesse tangentielle est quant à elle modélisée par le système réduit POD (5.2).

Il reste alors à déterminer la quantité physique à optimiser numériquement. L'objectif final de cette étude est de déterminer une loi de contrôle permettant de réduire la traînée de l'écoulement. Il semblerait donc logique, de considérer comme fonction de coût directement la traînée, comme nous l'avons fait à l'annexe D pour déterminer des systèmes optimaux basés sur le modèle de Navier-Stokes. Or, pour l'écoulement de sillage, la contribution du champ de pression au coefficient de traînée est prépondérante devant la contribution du champ de vitesse et cela dans un rapport 80%/20% (voir d'une part, figures 6.1 et 6.2 et d'autre part, Bergmann, 2004). Certains, comme Min et Choi (1999) ont donc considéré avec succès, pour la même configuration et le même objectif final, des fonctions de coût uniquement basées sur le champ de pression. D'autres, comme Graham *et al.* (1999b) et Homescu *et al.* (2002) ont étudié, avec autant de succès, des fonctionnelles objectif dépendant uniquement du champ de vitesse. Or, puisque dans ce chapitre², le système réduit POD ne représente que les champs de vitesse, il nous est impossible de retenir pour fonction objectif la traînée aérodynamique du cylindre. Par conséquent, nous chercherons à minimiser une quantité représentative de la traînée, l'instationnarité du sillage *i.e.* son énergie (Graham *et al.*, 1999b). Mathématiquement, cet objectif est défini par la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\tilde{\mathbf{u}}, \gamma(t)) &= \int_0^T \int_{\Omega} J(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \gamma(t)) d\Omega dt \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_2^2 d\Omega dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \gamma^2(t) dt. \end{aligned}$$

Dans cette expression, le premier terme représente l'objectif à atteindre et le second terme le coût lié au contrôle. Les termes de régularisation $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ servent à tenir plus ou moins compte du coût lié au contrôle. Après introduction de la représentation (5.1) du champ de vitesse, cette fonctionnelle devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) &= \int_0^T J(\mathbf{a}, \gamma(t)) dt \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{\text{gal}}} (a_i(t))^2 dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \gamma^2(t) dt. \end{aligned} \tag{5.3}$$

². A la section 6.3, une base POD sera également construite pour la pression. La traînée pourra alors être directement prise comme fonction objectif.

Le problème d'optimisation à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{cases} \min_{\gamma(t)} \mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) \\ \text{t.q.} \\ \mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.4)$$

où les contraintes $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \mathbf{0}$ correspondent au modèle réduit POD (5.2a).

Le problème d'optimisation avec contraintes (5.4) est résolu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange décrite à la section 2.4.1. Les contraintes sont imposées par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange (ou variables adjointes ou de co-état) $\boldsymbol{\xi}$ et d'une nouvelle fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lagrange, définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{a}, \gamma, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) - \langle \boldsymbol{\xi}, \mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma) \rangle \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \int_0^T \xi_i(t) \mathcal{N}_i(\mathbf{a}, \gamma) dt. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les solutions (variables d'état \mathbf{a} , variables adjointes $\boldsymbol{\xi}$ et loi de contrôle γ) de ce nouveau problème d'optimisation sans contrainte, sont telles qu'elles rendent la fonctionnelle $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \gamma, \boldsymbol{\xi})$ stationnaire *i.e.* :

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta a_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i \equiv 0$$

où $\delta \mathbf{a}$, $\delta \gamma$ et $\delta \boldsymbol{\xi}$ correspondent à des variations arbitraires.

En supposant³ que tous les arguments de \mathcal{L} sont indépendants, le système optimal est déterminé en annulant successivement les dérivées de \mathcal{L} dans les directions $\boldsymbol{\xi}$, \mathbf{a} et γ .

La dérivée de Fréchet $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i$ redonne l'équation d'état $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \mathbf{0}$.

L'annulation de la dérivée directionnelle suivant les variables d'état \mathbf{a} donne, après intégrations par parties, les équations adjointes

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = -\alpha a_i(t) - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma(t) \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=1}^{N_{gal}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a_k(t) \right) \xi_j(t) \quad (5.6a)$$

munies des conditions terminales

$$\xi_i(T) = 0. \quad (5.6b)$$

Finalement, l'annulation de la dérivée directionnelle suivant la loi de contrôle γ donne la condition d'optimalité

$$\delta \gamma(t) = - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \mathcal{D}_i \frac{d\xi_i}{dt} + \beta \gamma + \sum_{i=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\mathcal{G}_i \gamma(t) \right) \xi_i. \quad (5.7)$$

Les conditions nécessaires du premier ordre conduisent à un système couplé d'équations aux dérivées partielles, dénommé *système optimal*. Ce dernier est constitué par les équations d'état (5.2), les équations adjointes (5.6) et les conditions d'optimalité (5.7).

5.3.2 Résolution du système optimal réduit

Ce système d'équations peut être résolu par une méthode directe, dite méthode à un tir, en considérant le système optimal constitué des équations d'état (5.2), des équations adjointes (5.6) et des conditions d'optimalité (5.7) comme un système à part entière. Mais pour des raisons de coût numérique, ce système est généralement résolu par la méthode itérative présentée au paragraphe suivant.

3. On rappelle qu'en toute rigueur cette hypothèse est fautive pour le problème d'optimisation avec contraintes car les variables \mathbf{a} et γ sont liées par l'équation $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \mathbf{0}$.

Processus itératif de résolution du système optimal

Pour une loi de contrôle $\gamma(t)$ donnée, il est possible de résoudre le système d'état constitué par le modèle réduit POD (5.2). La solution de ce système fournit alors l'évolution temporelle des variables d'état \mathbf{a} . Connaissant la loi de contrôle $\gamma(t)$ et l'évolution temporelle des variables d'état \mathbf{a} , l'évolution temporelle des variables adjointes $\boldsymbol{\xi}$ est obtenue par résolution du système adjoint (5.6). Connaissant la loi de contrôle γ , les variables d'état \mathbf{a} et les variables adjointes $\boldsymbol{\xi}$, la condition d'optimalité (5.7) peut être évaluée. L'évaluation de cette condition fournit une quantité représentative du gradient de la fonction objectif par rapport aux variables de contrôle. Cette quantité est ensuite utilisée pour déterminer une direction de descente $d(t)$ afin de minimiser la fonctionnelle objectif \mathcal{J} par un algorithme d'optimisation, laissé au choix de l'utilisateur. Une revue des algorithmes d'optimisation peut être trouvée à l'annexe C ainsi que dans Nocedal et Wright (1999). La loi de contrôle $\gamma(t)$ minimisant la fonctionnelle objectif le long de la direction de descente $d(t)$ est obtenue en sortie d'une itération du processus itératif de résolution du système optimal et utilisée pour initialiser une nouvelle étape du processus d'optimisation. Cette méthode de résolution itérative du système optimal est synthétisée par l'algorithme 2.

Algorithme 2 (Résolution itérative du système optimal)

On se fixe une loi de contrôle initiale $\gamma(t)$.

1. Pour la dernière loi de contrôle obtenue, on résout le système POD ROM (5.2) en temps croissant pour obtenir les variables d'état $\mathbf{a}(t)$.
2. En utilisant les variables d'état déterminées en 1, on résout les équations adjointes (5.6) en temps décroissant pour obtenir les variables adjointes $\boldsymbol{\xi}(t)$.
3. En utilisant les variables d'état et les variables adjointes respectivement déterminées en 1 et 2, on évalue la condition d'optimalité (5.7).
4. A partir de cette estimation, on calcule une nouvelle loi de contrôle $\gamma_{new}(t) = \gamma_{old}(t) + \omega d(t)$ où $d(t)$ est une direction de descente construite à l'aide du gradient $\frac{d\mathcal{J}}{d\gamma} = \delta\gamma$ et où ω est le pas à effectuer le long de cette direction de descente.
5. Si un critère de convergence est vérifié, on arrête le processus itératif, sinon on retourne à l'étape 1.

La figure 5.2 représente schématiquement le fonctionnement du processus d'optimisation décrit par l'algorithme 2.

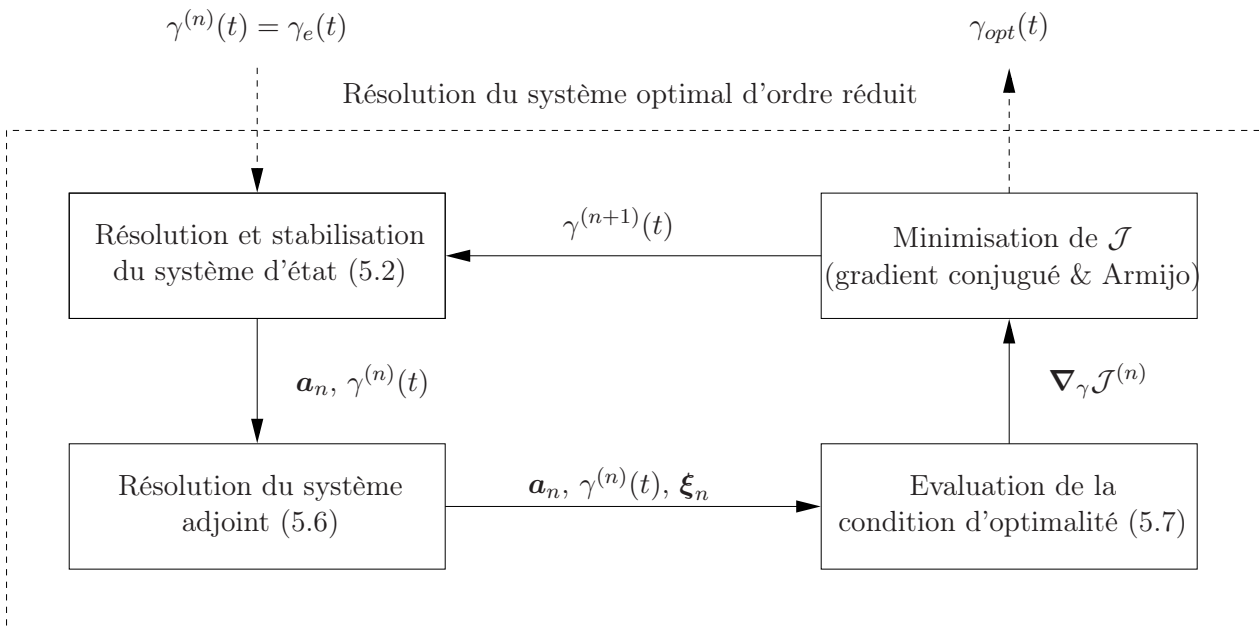


FIGURE 5.2 – Représentation schématique du processus d'optimisation.

5.4 Loi de contrôle obtenue par le système réduit POD

A la section 4.4.2, nous avons montré qu'après introduction de viscosités tourbillonnaires, le système réduit POD (5.2) représentait de manière satisfaisante la dynamique de l'écoulement contrôlé de sillage. Par conséquent, dans cette section, on utilise les résultats de la théorie du contrôle optimal présentés à la section 5.3 pour déterminer la loi de contrôle $\gamma(t)$.

5.4.1 Influence du contrôle sur la base POD

Jusqu'à ces dernières années, il était communément admis, que la base POD déterminée pour une configuration non contrôlée de l'écoulement, pouvait encore être utilisée pour représenter les variables d'état dans la boucle de contrôle de l'écoulement. L'intuition faisait pourtant penser le contraire car il était difficile d'imaginer que les mêmes modes maximisent à la fois la contribution énergétique de l'écoulement contrôlé et de l'écoulement non contrôlé (voir discussion dans l'introduction générale). Cette question a été définitivement tranchée dernièrement par une étude réalisée dans l'équipe de Scott Collis à l'université de Rice. En effet, Prabhu *et al.* (2001) ont mis en évidence numériquement que les fonctions POD évaluées pour un écoulement non contrôlé de canal étaient fortement altérées lorsqu'un contrôle était appliqué à l'écoulement. Une attention toute particulière doit donc être apportée dans le choix de la fonction γ utilisée pour générer la base POD (voir figures 2(c) et 2(d) pour s'en convaincre aisément). En effet, Graham *et al.* (1999a) montrent qu'il est nécessaire que γ balaie l'ensemble de la dynamique contrôlée du système pour que la base POD soit en mesure de suivre l'évolution dynamique du système quand le contrôle est imposé (voir également Gunzburger, 2004). Améliorer la représentation dynamique du système réduit, et ainsi avoir la possibilité de ne pas réactualiser la base POD au cours du processus d'optimisation, se paie par l'obligation de conserver dans le système réduit, un nombre de modes POD plus important que si l'on cherchait uniquement à reproduire une dynamique donnée, fut-elle forcée (§ 4.4.2). Dans ces conditions, il paraît surprenant que Ravindran n'ait pas été amené à prendre le même type de précautions dans son étude du contrôle de l'écoulement en aval d'une marche descendante (Ravindran, 2000b). On peut alors raisonnablement s'interroger sur les solutions optimales qu'il présente.

5.4.2 Fonctions de base POD généralisées

Dans ce chapitre, on réalise une étude en boucle ouverte (voir figure 5.1). Le système réduit POD doit donc être capable de représenter toutes les dynamiques intermédiaires qui interviennent durant la boucle d'optimisation, d'où l'importance de développer un modèle POD précis et robuste. Pour cette raison, on décide de suivre l'idée introduite dans Graham *et al.* (1999a) et de générer des fonctions de base POD généralisées. Pour cela, on impose au cylindre une excitation temporelle γ_e qui balaie une large gamme de fréquences et d'amplitudes. Cette excitation, représentée sur la figure 5.3, est décrite mathématiquement par l'expression :

$$\gamma_e(t) = A_1 \sin(2\pi St_1 t) \times \sin(2\pi St_2 t - A_2 \sin(2\pi St_3 t))$$

où $A_1 = 4$, $A_2 = 18$, $St_1 = 1/120$, $St_2 = 1/3$ et $St_3 = 1/60$.

Le spectre de l'excitation γ_e représenté sur la figure 5.4 montre une répartition fréquentielle variant continûment de $St = 0,1$ à $St \simeq 0,6$ et présentant une légère dominance aux alentours de $St \simeq 0,4$.

Les équations de Navier-Stokes sont alors résolues en imposant γ_e pour vitesse tangentielle sur le cylindre. Finalement, la matrice de corrélations temporelles C est construite à l'aide de 600 réalisations de l'écoulement prises uniformément sur une période d'excitation égale à $T = 60$. Comparé au cylindre non contrôlé, cet écoulement manipulé présente un nombre beaucoup plus important de degrés de liberté excités. Cela se traduit directement sur la vitesse de décroissance du spectre des valeurs propres (figure 5.6), ou dit autrement, sur le contenu énergétique des modes POD représenté sur la figure 5.5 en terme du contenu informationnel relatif défini par

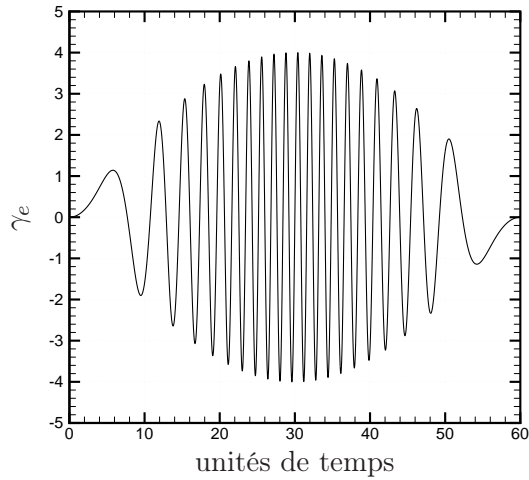


FIGURE 5.3 – Excitation temporelle γ_e imposée au cylindre.

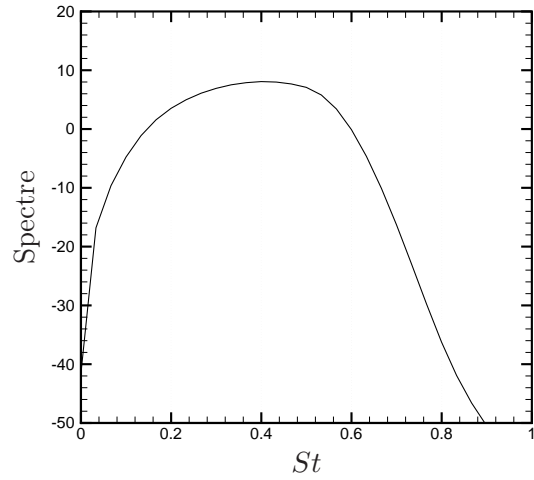


FIGURE 5.4 – Densité spectrale de puissance de l'excitation temporelle γ_e .

$$RIC(M) = \frac{\sum_{k=1}^M \lambda_k}{\sum_{k=1}^{N_{POD}} \lambda_k}.$$

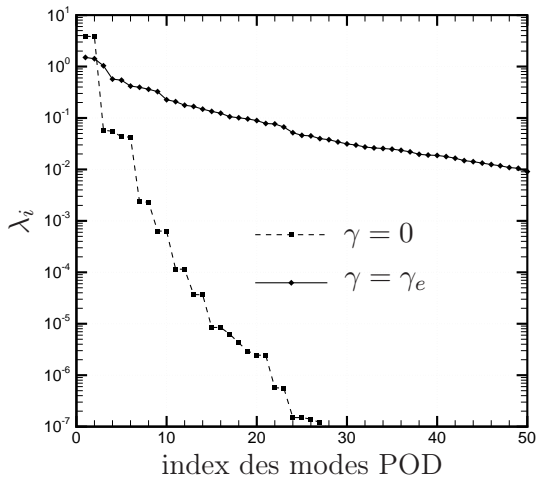


FIGURE 5.5 – Comparaison des spectres de valeurs propres pour l'écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$) et pour l'écoulement manipulé ($\gamma = \gamma_e$).

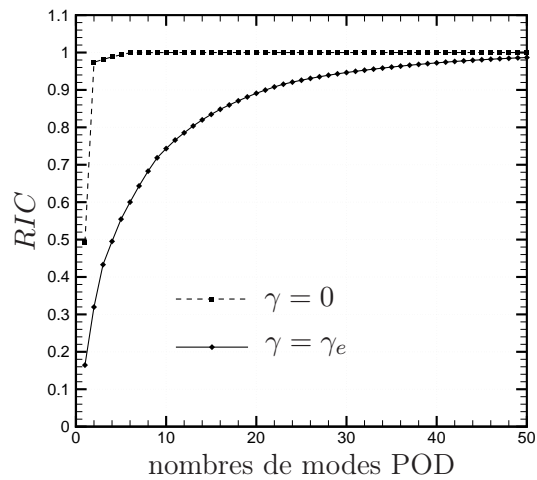


FIGURE 5.6 – Comparaison du contenu informationnel relatif pour l'écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$) et pour l'écoulement manipulé ($\gamma = \gamma_e$).

En effet, si 2 modes étaient suffisants pour représenter 98% de l'énergie cinétique total en configuration non contrôlée, il est maintenant nécessaire de conserver 40 modes POD (soit encore moins de 7% de l'ensemble des modes) lorsque l'excitation γ_e est imposée au cylindre. Pour un nombre donné de modes POD, conservés dans la décomposition des champs de vitesse, l'erreur de projection des réalisations sur la base POD est donc plus importante pour l'écoulement manipulé que pour l'écoulement non contrôlé. De ce fait, les équations

d'état 5.2a, utilisées dans le processus itératif présenté à l'algorithme 2, possèdent $N_{gal} = 40$ modes.

Les isovaleurs de la norme euclidienne des 6 premiers modes POD obtenus en appliquant l'excitation γ_e sont représentées sur la figure 5.7. Les deux premiers modes propres sont représentatifs d'une longueur d'onde similaire au cas non contrôlé (voir figure 4.4). Le troisième mode correspond aux grandes fréquences d'oscillations (accompagnées de grandes amplitudes) et est localisé autour du cylindre. Les modes suivants correspondent à des corrections plus ou moins importantes à apporter aux trois premiers modes. Chaque correction correspondant à des dynamiques bien différentes.

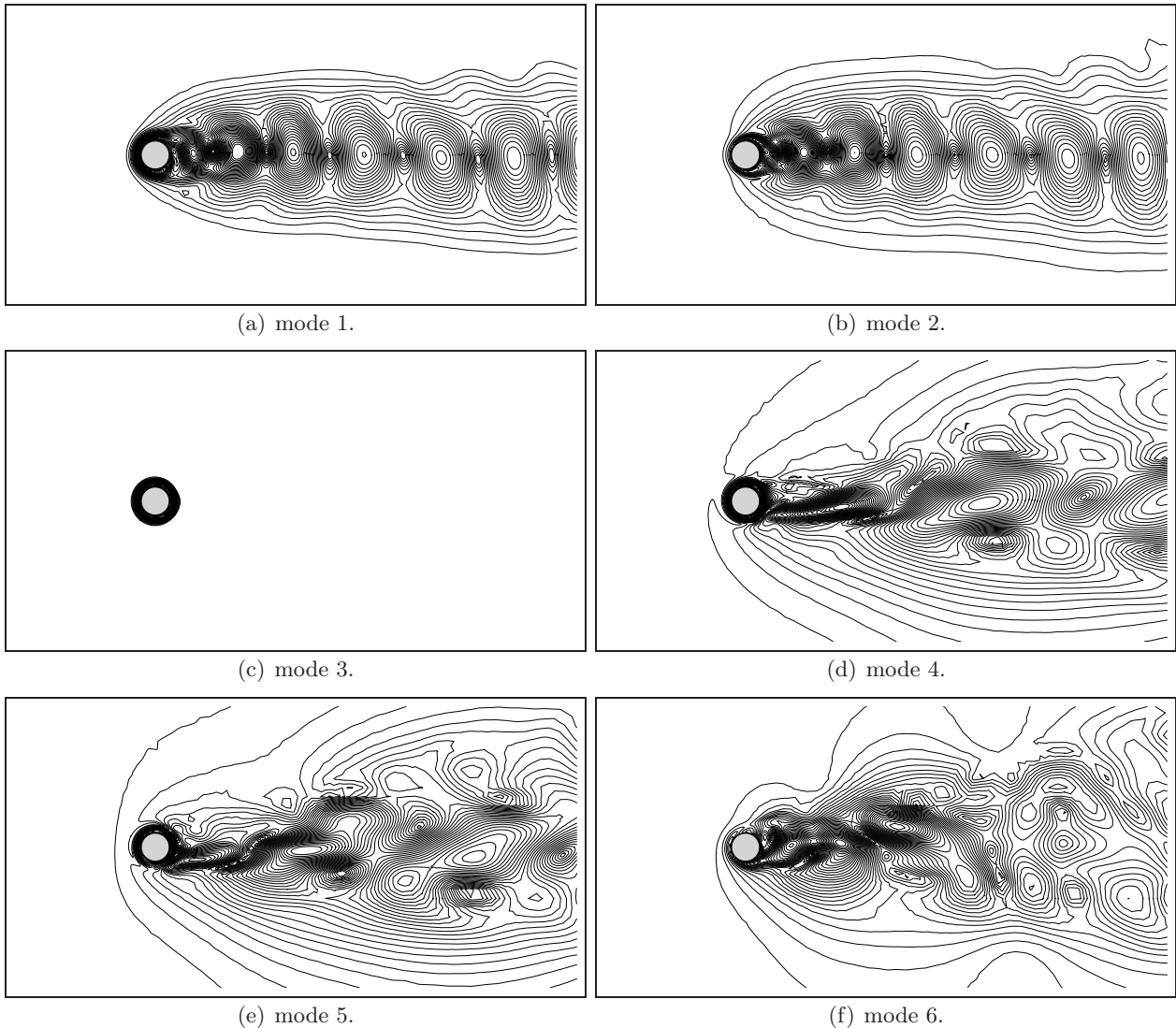


FIGURE 5.7 – Isovaleurs de la norme euclidienne des 6 premiers modes POD obtenus pour $\gamma(t) = \gamma_e(t)$.

5.4.3 Résultats du contrôle optimal par système réduit POD

Les résultats de ce paragraphe correspondent au cas où le coût lié au contrôle est négligé, ce qui revient à poser $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ dans la fonctionnelle (5.3). Par ailleurs, puisque le signal d'excitation γ_e est paire par rapport à $t = 30$, l'intervalle temporel est par la suite restreint à $0 \leq t \leq 30$.

Le système dynamique (5.2) est construit en utilisant la loi de contrôle γ_e . Après une phase de stabilisation (voir § 4.4.2), l'intégration de ce système permet de déterminer un jeu de coefficients de prédiction temporels

$a_n(t)$. L'évolution temporelle des 6 premiers coefficients de prédiction est représentée sur la figure 5.8. Sur la première moitié du signal, les deux premiers coefficients a_1 et a_2 , qui correspondent aux modes POD naturels, sont dominants. Sur la seconde partie du signal, les coefficients a_4 , a_5 et a_6 associés aux modes POD affectés par l'excitation γ_e , s'amplifient. Le coefficient a_3 , qui correspond au mode POD localisé autour du cylindre, suit plus ou moins l'évolution temporelle de l'excitation γ_e , avec cependant une amplitude différente.

La loi de contrôle γ_{opt} est déterminée comme la solution convergée du processus itératif présenté à l'algorithme 2, la loi de contrôle initiale étant γ_e . Au point 4 du processus itératif de résolution, la direction de descente est déterminée par une méthode de gradient conjugué de type Fletcher-Reeves (voir annexe C), la longueur du pas dans cette direction de descente étant évaluée par une méthode d'Armijo à rebroussement. Cette méthode est classique et les détails peuvent être trouvés dans Nocedal et Wright (1999). Le critère de convergence choisi correspond à $|\Delta\mathcal{J}(\mathbf{a},\gamma)| = |\mathcal{J}_{\text{new}}(\mathbf{a},\gamma) - \mathcal{J}_{\text{old}}(\mathbf{a},\gamma)| < 10^{-5}$. Une fois ce critère de convergence satisfait, la réduction relative de la fonction⁴ de coût \mathcal{J} est égale à 69%. La figure 5.10 représente l'évolution de la valeur de la fonction objectif \mathcal{J} en fonction des itérations du processus d'optimisation. Les évolutions temporelles de l'instationnarité du sillage, définie par la fonction J (équation 5.3), sont représentées sur la figure 5.11 : on constate une décroissance très nette de l'instationnarité quand la loi de contrôle optimale γ_{opt} est appliquée. Finalement, la loi de contrôle optimale γ_{opt} est représentée sur la figure 5.12. Cette loi de contrôle optimale affecte de manière significative l'évolution temporelle des coefficients de prédiction comme le montre la figure 5.9 : l'amplitude de ces coefficients est fortement diminuée, ce qui traduit le fait que l'objectif est atteint (voir fonction objectif 5.3).

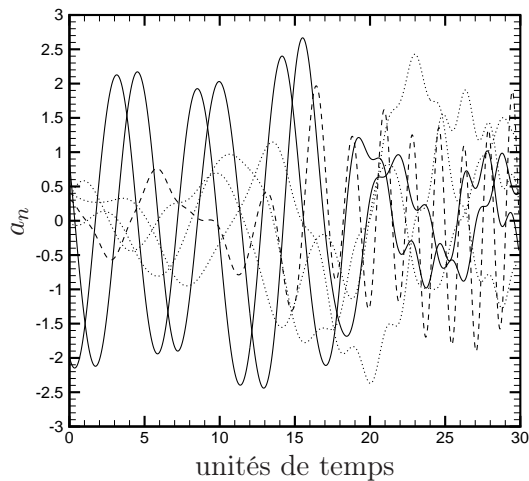


FIGURE 5.8 – Evolution temporelle des 6 premiers coefficients de prédiction pour $\gamma(t) = \gamma_e(t)$: — a_1 et a_2 , - - - a_3 et \dots a_4 , a_5 et a_6 .

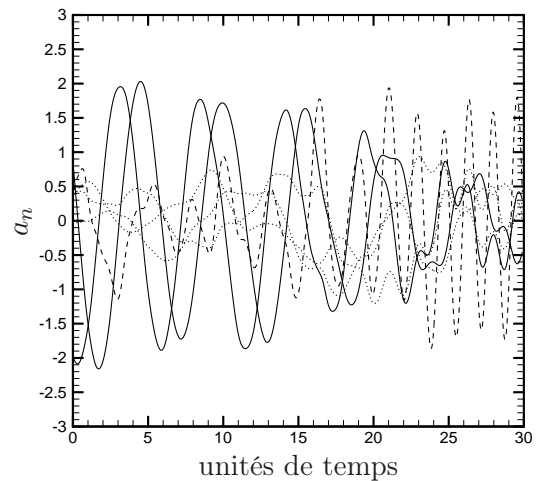


FIGURE 5.9 – Evolution temporelle des 6 premiers coefficients de prédiction pour $\gamma(t) = \gamma_{opt}(t)$: — a_1 et a_2 , - - - a_3 et \dots a_4 , a_5 et a_6 .

Des réductions de traînée, obtenues par des lois de contrôle harmoniques, sont rapportées dans Tokumaru et Dimotakis (1991); Baek et Sung (1998); He *et al.* (2000); Homescu *et al.* (2002); Protas et Wesfreid (2002). Afin de comparer nos résultats à ceux de la littérature, nous devons écrire γ_{opt} sous la forme $A \sin(2\pi St_f t)$ et donc déterminer l'amplitude moyenne A et le nombre de Strouhal dominant St_f . L'amplitude moyenne $A \simeq 2,2$ est facilement déterminée. La figure 5.13 représente le spectre de la loi de contrôle γ_{opt} : un pic dominant apparaît pour un nombre de Strouhal $St_f \simeq 0,53$ et deux autres pics moins énergétiques sont également visibles. D'après He *et al.* (2000), les contributions en terme de réduction de traînée de ces pics secondaires sont négligeables. La loi de contrôle γ_{opt} sera donc finalement approchée par une fonction harmonique d'amplitude

4. Plus exactement, la valeur de \mathcal{J} est égale à 11,85 au début du processus et à 3,70 après convergence, soit après 600 itérations. Pour référence, \mathcal{J} est approximativement égale à 10 pour l'écoulement non contrôlé.

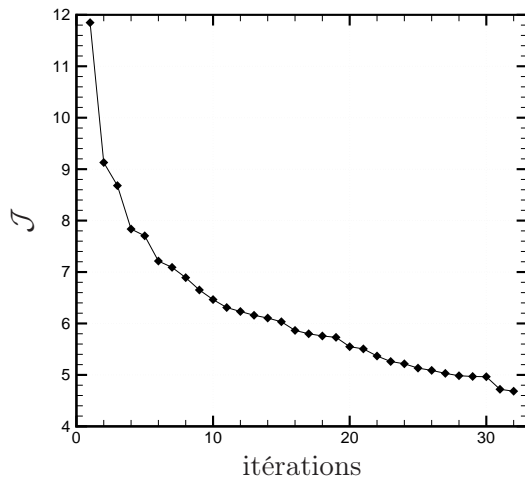


FIGURE 5.10 – Evolution des valeurs de la fonction objectif \mathcal{J} .

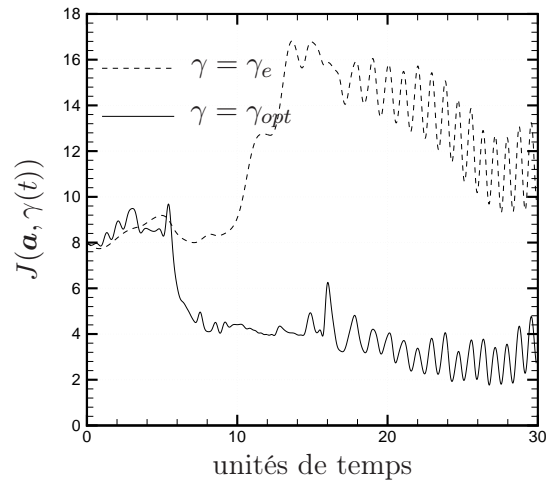


FIGURE 5.11 – Evolution temporelle de l'instationnarité du sillage. Comparaison solution initiale ($\gamma = \gamma_e$) et solution convergée ($\gamma = \gamma_{opt}$) du processus d'optimisation sur le modèle réduit.

$A = 2,2$ et de fréquence de forçage $St_f = 0,53$.

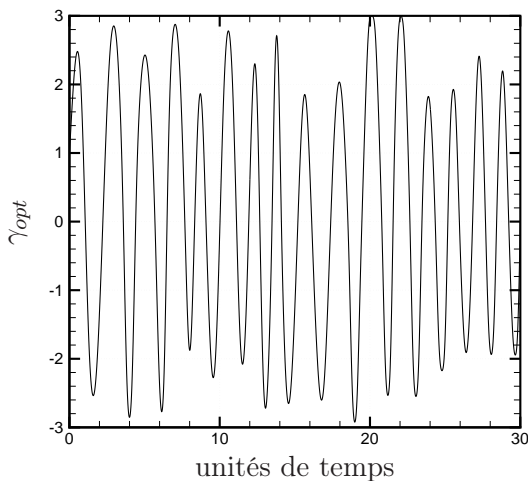


FIGURE 5.12 – Evolution temporelle de la loi de contrôle γ_{opt} .

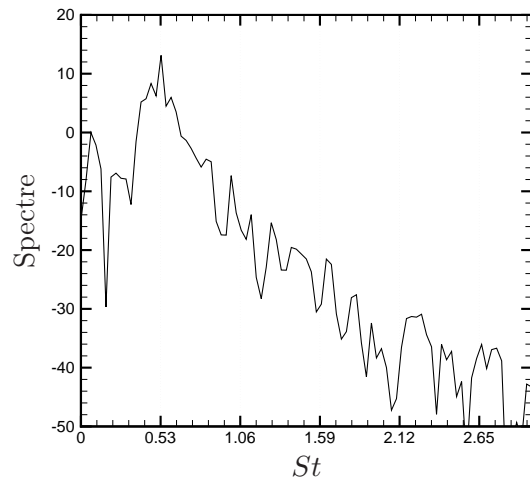


FIGURE 5.13 – Densité spectrale de puissance de la loi de contrôle γ_{opt} .

5.4.4 Réduction de traînée obtenue par les équations de Navier-Stokes

Par définition du problème d'optimisation (5.4), la loi de contrôle γ_{opt} est optimale pour le système réduit POD. Or, dans le cadre de l'approche utilisée dans ce chapitre (ce ne sera plus le cas au chapitre 7 lorsqu'une méthode d'optimisation à région de confiance sera utilisée), aucune preuve n'existe sur l'optimalité de la solution γ_{opt} pour le modèle de Navier-Stokes. Certes, il a été trouvé à la section précédente que la loi de

contrôle γ_{opt} réduisait considérablement l'énergie du sillage (69%), mais l'objectif fixé consiste à réduire la traînée aérodynamique du cylindre. Par conséquent, il est nécessaire de résoudre les équations de Navier-Stokes avec la loi de contrôle optimale $\gamma = \gamma_{opt}(t)$ déterminée précédemment, pour déterminer son influence sur le coefficient de traînée.

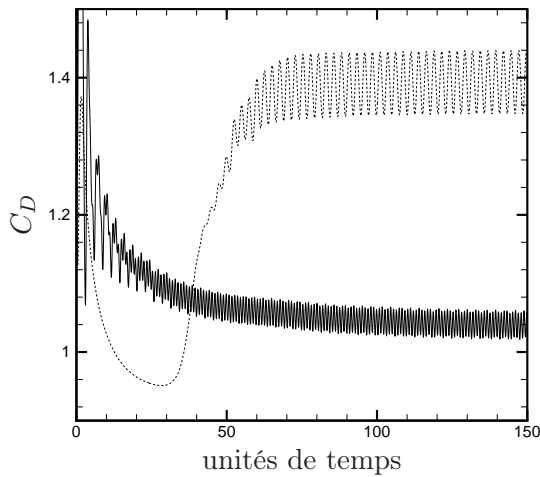


FIGURE 5.14 – Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de traînée dans le cas non contrôlé (traits pleins) et dans le cas où le contrôle optimal est appliqué (pointillés).

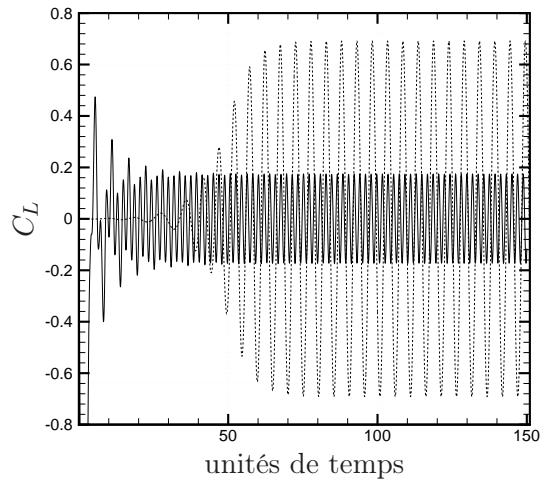


FIGURE 5.15 – Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance dans le cas non contrôlé (traits pleins) et dans le cas où le contrôle optimal est appliqué (pointillés).

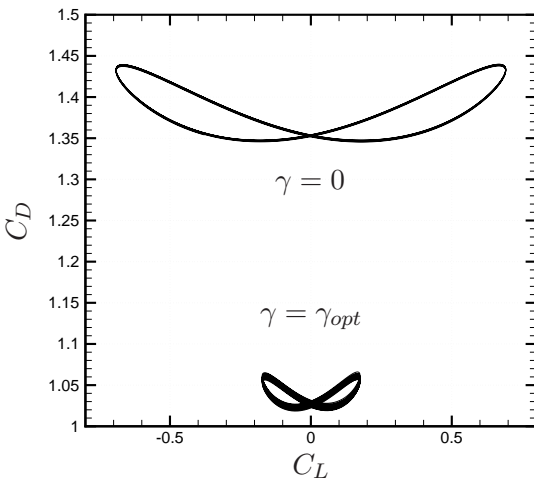


FIGURE 5.16 – Courbes polaires: évolution du coefficient de traînée en fonction du coefficient de portance. Le cycle haut correspond au cas non contrôlé et le cycle du bas correspond au cas où le contrôle optimal est appliqué.

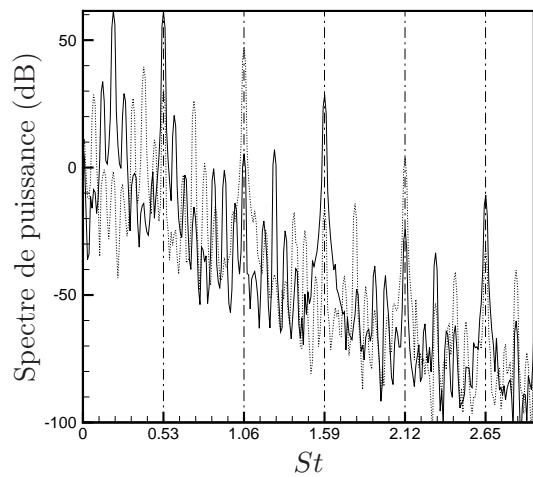


FIGURE 5.17 – Spectres de puissance de la traînée \dots et de la portance – pour l'écoulement contrôlé.

Les figures 5.14 et 5.15 représentent une comparaison de l'évolution temporelle respectivement du coef-

coefficient de traînée et du coefficient de portance pour l'écoulement non contrôlé et l'écoulement contrôlé. La réduction de traînée est de l'ordre de 25% (on passe d'une valeur moyenne égale à 1,4 à une valeur moyenne égale à 1,04). L'amplitude des oscillations du coefficient de portance est, quant à elle, fortement diminuée lorsque le contrôle est appliqué (on passe de 1,38 à 0,34). Ces résultats sont synthétisés sur la figure 5.16 qui représente les courbes polaires (évolution du coefficient de traînée en fonction du coefficient de portance) pour l'écoulement non contrôlé et l'écoulement contrôlé. Les spectres de puissance des coefficients aérodynamiques, représentés sur la figure 5.17, montrent que l'écoulement contrôlé oscille maintenant à la fréquence de contrôle $St_f = 0,53$. Finalement, les figures 5.18(a) et 5.18(b) présentent respectivement les isovalues de la vorticité en régime non contrôlé et contrôlé. L'allée tourbillonnaire de Von K rm n, bien visible sur la figure 5.18a) en absence de contrôle, est fortement diminuée lorsque le contrôle optimal γ_{opt} est appliqué (figure 5.18(b)). Par ailleurs, on constate que l'écoulement tend à se symétriser. Ces résultats sont parfaitement comparables aux effets observés dans Tokumar et Dimotakis (1991), He *et al.* (2000) et Protas et Styczek (2002).

5.4.5 Discussion

De manière similaire aux études précédentes, qui utilisent les équations de Navier-Stokes comme équations d'état du système optimal, l'utilisation d'un système réduit POD comme équations d'état a permis d'obtenir une réduction de traînée conséquente (25%). Commentons maintenant un peu les résultats de la littérature, tant en terme de pourcentage de réduction du coefficient de traînée qu'en terme de loi de contrôle. Par exemple, He *et al.* (2000) ont déterminé par contrôle optimal qu'une diminution de traînée de 30% pouvait être obtenue pour un forçage harmonique d'amplitude $A = 3$ et de fréquence $St_f = 0,75$   $Re = 200$. Par application d'une loi de contrôle optimale de très faible amplitude, Protas et Styczek (2002) ont, quant à eux, obtenu une réduction de traînée de 15% pour un nombre de Reynolds égal à 150, qui présente une contrôlabilité légèrement inférieure à celle obtenue pour $Re = 200$ (voir figure 1.29). Comme cela a été suggéré par Homescu *et al.* (2002), ces différences proviennent essentiellement de formulations différentes de la fonctionnelle objectif. Les objectifs, tout en étant physiquement identiques (minimisation de la traînée), sont écrits mathématiquement de manières variées.

Réduction des coûts de calcul

L'utilisation de la méthode d'optimisation présentée dans ce chapitre permet de réduire de manière significative les coûts de calcul, tant en encombrement mémoire qu'en temps CPU, pour atteindre un objectif fixé. Afin de chiffrer avec précision la réduction effective obtenue, les coûts de calcul engendrés dans notre étude peuvent être comparés à ceux obtenus par une méthode basée sur la théorie du contrôle optimal appliquée aux équations de Navier-Stokes (He *et al.*, 2000).

Afin d'obtenir des résultats pertinents concernant les coûts de calcul, les paramètres numériques suivants sont supposés être identiques dans notre étude et dans celle de He *et al.* (2000). L'horizon d'étude est choisi égal à $T = 20$, et le pas de discrétisation temporelle égal à $\Delta t = 0,01$. Le maillage bidimensionnel utilisé comporte 12000 nœuds. Afin de simplifier les calculs, on s'intéresse uniquement à la détermination d'un gradient, soit une étape de la méthode d'optimisation.

En mémoire

- Système d' tat Navier-Stokes, He *et al.* (2000) : afin de déterminer le gradient de la fonction objectif, il est nécessaire de stocker en mémoire les trois variables d'état (2 composantes de vitesse plus le champ de pression) ainsi que les trois variables adjointes associées. Dans le cas où les équations de Navier-Stokes sont utilisées, ces variables peuvent être évaluées sur une base locale de type éléments finis. Il est alors nécessaire de stocker toutes les variables en chaque nœud du maillage. Ces variables doivent également être stockées à chaque pas de temps. Il est alors nécessaire de stocker en mémoire $Nv = (\text{nombre de variables}) \times (\text{nombre de nœud du maillage}) \times (\text{nombre de pas de temps})$ valeurs. Numériquement, on obtient $Nv = (3 \times 2) \times (12000) \times (20/0,01) = 144$ millions de valeurs.
- Système d' tat POD, présente étude : afin de restituer 99,9% de l'énergie totale du système, on conserve 40 modes Galerkin dans la base généralisée, soit 40 variables d' tat. Les coefficients du système réduit POD doivent également être stockés, soit 4 coefficients linéaires, 2 coefficients quadratiques et 1 coefficient cubique (la base POD peut éventuellement être stockée pour une utilisation ultérieure, soit

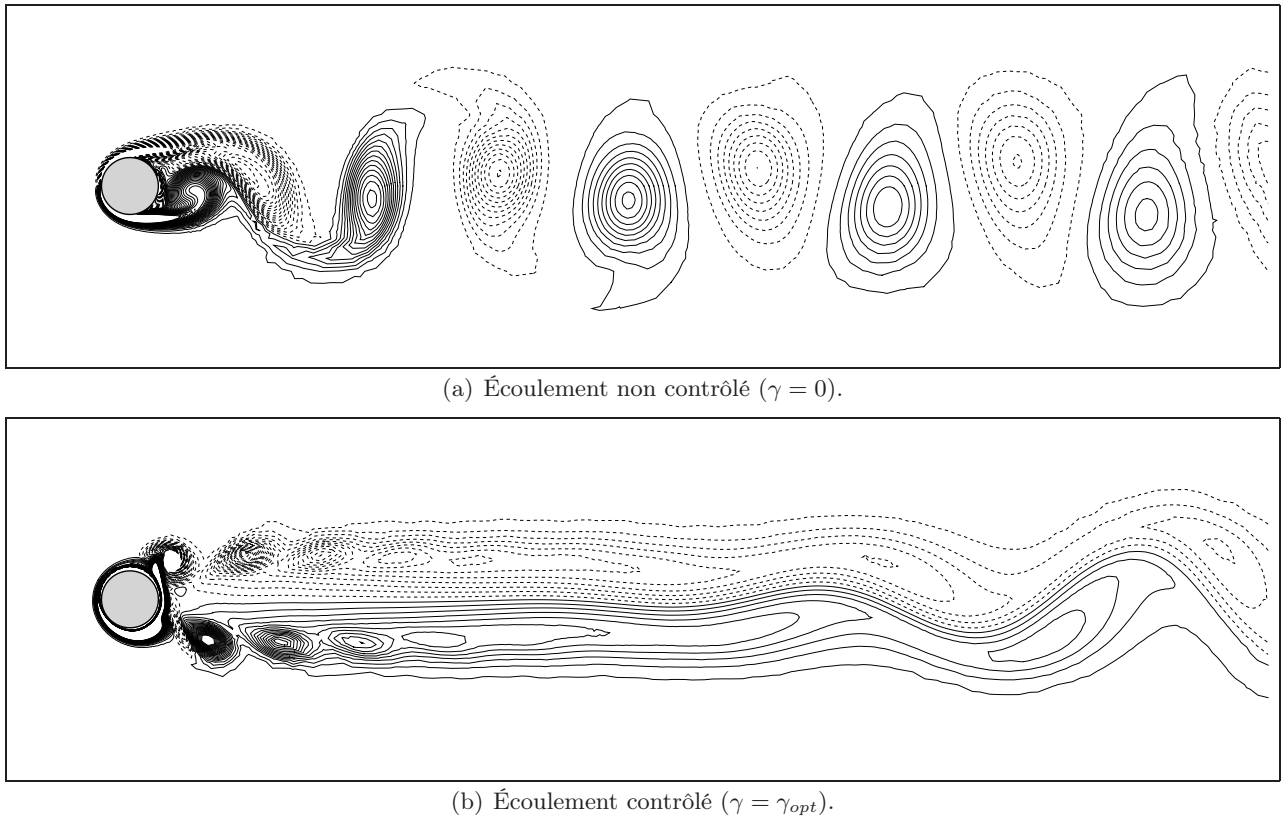


FIGURE 5.18 – Iso-vorticités pour l'écoulement non contrôlé (a) et contrôlé (b) à $t = 150$. Les lignes discontinues correspondent aux valeurs négatives.

$40 \times 12\,000$ valeurs). On est donc amené à stocker $(40 \times 2) \times (20/0,01) + (4 \times 40 + 2 \times 40^2 + 40^3) = 227\,360$ variables.

L'utilisation d'un modèle d'ordre réduit POD, en lieu et place du modèle de Navier-Stokes, dans un processus de contrôle optimal, permet de réduire le stockage mémoire d'un facteur égal à $144\,000\,000/227\,360 \simeq 600$.

Si la base POD est conservée, on doit stocker $88\,860 + 40 \times 12\,000 = 707\,360$ variables. La réduction obtenue est alors égale à 200.

En temps de calcul Dans notre étude, le temps CPU nécessaire pour résoudre les équations d'état réduites POD sur un horizon T_c représente 1% du temps nécessaire pour résoudre les équations de Navier-Stokes. En première approximation, le même gain est obtenu sur la résolution des équations adjointes et sur l'évaluation de la condition d'optimalité. Le temps de calcul total est donc diminué de manière très importante.

La réduction des coûts numériques proposée par notre approche est si importante que le contrôle optimal d'écoulements tridimensionnels autour de géométries complexes devient envisageable. Cependant, comme il est suggéré dans Gunzburger (2000), le succès d'une approche par modèle réduit de dynamique dépend de la capacité de la base POD à représenter la solution optimale au cours du processus d'optimisation. L'utilisation d'un système réduit POD pour résoudre un problème d'optimisation faisant intervenir différentes dynamiques n'est certainement pas une tâche aisée à moins de réactualiser la base POD au cours du processus d'optimisation. Les deux chapitres suivants présentent des méthodes d'optimisation pour lesquelles la base POD est réactualisée au cours du processus itératif. Au chapitre 6, une méthode adaptative sera d'abord utilisée, suivant en cela les travaux de Ravindran (2000b) et Afanasiev et Hinze (2001). Enfin, au chapitre 7, on utilisera des méthodes à régions de confiance. Pour cela, Fahl (2000) propose l'utilisation de méthodes à régions de confiance comme critère de réactualisation de la base POD.

5.5 Conclusions

L'objectif de cette étude était d'illustrer le gain potentiel que l'on peut obtenir en utilisant des systèmes réduits POD pour le contrôle optimal d'écoulements. Cette méthode a été présentée en vue de contrôler par rotation instationnaire l'écoulement laminaire ($Re = 200$) autour d'un cylindre circulaire. En définissant une fonctionnelle coût représentative de l'énergie du sillage, le problème de contrôle optimal est résolu en prenant le système réduit POD de l'écoulement contrôlé comme équations d'état. La solution optimale déterminée à l'aide du système réduit POD est alors utilisée pour contrôler numériquement l'écoulement solution des équations de Navier-Stokes. Finalement, une réduction de traînée de l'ordre de 25% est mise en évidence. Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par d'autres équipes de chercheurs (He *et al.*, 2000; Homescu *et al.*, 2002; Protas et Styczek, 2002) qui utilisent les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles comme équations d'état. En comparaison avec ces études, l'intérêt principal de notre approche est que nos coûts de calcul (CPU et mémoire) sont négligeables devant les leurs. L'inconvénient majeur est qu'il n'y a aucune preuve que la solution optimale obtenue par le modèle réduit POD converge vers la solution optimale du modèle dynamique original. Comme il est suggéré dans Alexandrov *et al.* (1997), une méthode pour s'assurer que la solution optimale du modèle réduit converge au moins vers un minimum local du problème original, est d'utiliser les méthodes à région de confiance.

