

Chapitre 6

Optimisation par méthode adaptative et modèles réduits POD

Sommaire

6.1	Introduction	149
6.2	Fonction objectif	150
6.3	Reconstruction du champ de pression par POD	151
6.3.1	Détermination d'une base POD pour la pression	151
6.3.2	Reconstruction du champ de pression par POD	153
6.4	Reconstruction de la fonction objectif par POD	156
6.4.1	Fonctions de base en champs fluctuants	157
6.4.2	Fonctions de base avec champs moyens	158
6.4.3	Fonctions de base avec modes de non-équilibre	159
6.4.4	Résultats des différentes approches	163
6.5	Méthode adaptative POD	166
6.5.1	Processus de résolution	166
6.5.2	Formulation contrôle optimal	167
6.5.3	Résolution du système optimal	169
6.6	Résultats de la méthode adaptative POD	170
6.6.1	Résultats du processus d'optimisation adaptatif POD	170
6.6.2	Restriction du domaine de validité du contrôle d'un modèle réduit POD	171
6.7	Conclusions	174

6.1 Introduction

Les résultats du chapitre 5 montrent qu'une loi de contrôle approximativement sinusoïdale minimise de manière optimale l'instationnarité du sillage pour le système POD ROM (§ 5.4.3). En outre, il a également été montré (§ 5.4.4) que cette loi permet¹ de réduire de manière conséquente (25%) le coefficient de traînée pour le système Navier-Stokes. Il semble donc légitime de rechercher, dans la suite de ce mémoire, la vitesse tangentielle à imposer au cylindre, sous la forme d'une loi harmonique possédant deux paramètres, l'amplitude et le nombre de Strouhal. Or, à un couple donné de paramètres de contrôle correspond une unique dynamique (Bergmann, 2004). Dès lors, il n'est plus possible d'utiliser des fonctions POD généralisées (§ 5.4.2), pour construire le modèle réduit de dynamique qui sera utilisé lors du processus d'optimisation. La base POD étant *a priori* fortement dépendante des paramètres de contrôle retenus pour la déterminer (voir discussion menée au chapitre), il paraît alors indispensable, pendant le processus d'optimisation, de

1. Rappelons que dans le cadre de l'approche suivie au chapitre 5 (boucle ouverte sur le système Navier-Stokes), il n'existe aucune preuve que la solution du modèle réduit soit optimale pour le modèle précis. Seule une vérification *a posteriori* peut être réalisée.

réactualiser la base POD parallèlement à l'évolution des paramètres de contrôle. Par opposition au chapitre précédent, où la base POD n'était pas réactualisée au cours du processus d'optimisation, on parlera ici de *contrôle en boucle fermée*.

La méthode d'optimisation présentée dans ce chapitre est basée sur les travaux de Ravindran (1999, 2000a,b), Afanasiev et Hinze (2001) et Hinze et Volkwein (2004). On souhaite minimiser une fonction objectif sous contraintes d'équations d'état dont la solution n'est connue que par résolution d'un système d'ordre très élevé. Les coûts de calculs nécessaires à la résolution de ce problème d'optimisation peuvent rapidement devenir prohibitifs. Afin de réduire ces coûts, une idée consiste à remplacer le problème d'optimisation précédent, par une suite de sous-problèmes d'optimisation, plus simples à résoudre que l'original. Chaque sous-problème d'optimisation est alors construit à partir d'un modèle réduit basé sur la POD et d'une nouvelle fonction objectif, dite *fonction modèle*. Afin que chaque sous problème d'optimisation soit bien posé, la fonction modèle doit dépendre explicitement des variables d'état qui sont contraintes à vérifier le modèle d'ordre réduit. Le problème d'optimisation avec contraintes ainsi formulé pourra à nouveau être transformé en un problème d'optimisation sans contrainte, via l'introduction de multiplicateurs de Lagrange (cette méthode est décrite en détail à la section 2.4). Finalement, le système optimal fournira une nouvelle loi de contrôle qui réduit la valeur de la fonction objectif modèle, et qui peut être utilisée à l'itération suivante pour réactualiser la base POD par l'intermédiaire d'une nouvelle résolution du système Navier-Stokes. L'inconvénient majeur d'un système réduit construit par POD est qu'il ne représente *a priori* que la dynamique utilisée pour le construire : il n'existe donc aucune preuve que les paramètres de contrôle obtenus par résolution du système optimal POD soient acceptables, c'est à dire qu'ils produisent une décroissance de la *fonction objectif réelle*. Cependant, par cette méthode, Ravindran (2000a) a obtenu de très bons résultats, pour optimiser le placement d'actuateurs de soufflage-aspiration utilisés pour contrôler une zone de recirculation en aval d'une marche descendante. De même, Afanasiev et Hinze (2001) ont réussi à modifier, pour un nombre de Reynolds égal à 100, l'écoulement de sillage d'un cylindre circulaire afin de l'approcher d'un écoulement souhaité.

En résumé, dans ce chapitre, nous recherchons par résolutions successives de systèmes optimaux réduits, dont la base POD est réactualisée régulièrement par le système Navier-Stokes, l'amplitude et le nombre de Strouhal de la vitesse tangentielle du cylindre qui minimisent le coefficient de traînée moyen.

Après avoir introduit la fonction objectif et montré sa dépendance avec le champ de pression (§ 6.2), une méthode de reconstruction par POD du champ de pression sera présentée (§ 6.3). La fonction objectif pourra alors être reconstruite en utilisant différentes fonctions de base POD (§ 6.4). La procédure de contrôle adaptative sera ensuite détaillée (§ 6.5), incluant la construction et la résolution d'un système optimal d'ordre réduit. Enfin, les résultats numériques associés à notre objectif seront présentés (§ 6.6), ainsi que des résultats issus d'une amélioration de la méthode adaptative.

6.2 Fonction objectif

Comme nous venons de le préciser, la fonction objectif choisie dans cette étude est définie par la moyenne temporelle du coefficient de traînée, sur un horizon fini T . Afin de minimiser cette fonction par application d'une méthode d'optimisation adaptative basée sur la résolution de systèmes optimaux POD, il est nécessaire, pour que le problème soit bien posé, que la fonction objectif dépende des variables solutions du modèle réduit POD. Le but de ce paragraphe est de construire une fonction modèle de la fonction objectif, en utilisant les variables solutions d'un système d'ordre faible basé sur la POD.

Pour alléger les notations, nous noterons dans la suite de cette étude $\mathbf{c} = (A, St)^T$, le vecteur constitué des paramètres de contrôle définis par l'amplitude A et la fréquence St de la vitesse tangentielle du cylindre.

Un bilan de quantité de mouvement permet d'écrire que les forces exercées par le fluide sur l'obstacle, pour un contrôle \mathbf{c} donné, sont de la forme (section 1.4) :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_\nu = (C_D, C_L)^T = \int_{\Gamma_c} K_p \mathbf{n} d\Gamma - \frac{2}{Re} \int_{\Gamma_c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma.$$

Dans cette expression, \mathbf{n} est la normale extérieure au cylindre et K_p est le coefficient de pression défini par :

$$K_p = \frac{P - P_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2}.$$

L'évolution temporelle du coefficient de traînée est donc donnée par l'expression² :

$$C_D(u, p) = C_D^p(p) + C_D^v(u) = \int_{\Gamma_c} \frac{P - P_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2} n_x d\Gamma - \frac{2}{Re} \int_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma. \quad (6.1)$$

Les variables d'état u et p sont solutions du modèle de Navier-Stokes. L'expression (6.1) peut également être évaluée en utilisant les variables d'état \tilde{u} et \tilde{p} reconstruites par un modèle d'ordre réduit basé sur la POD³.

$$C_D(\tilde{u}, \tilde{p}) = C_D^p(\tilde{p}) + C_D^v(\tilde{u}) = \int_{\Gamma_c} \frac{\tilde{P} - P_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2} n_x d\Gamma - \frac{2}{Re} \int_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} n_y \right) d\Gamma. \quad (6.2)$$

La fonction objectif réelle, définie comme étant la moyenne temporelle du coefficient de traînée (6.1), évaluée sur un horizon fini T , s'écrit⁴ :

$$\mathcal{J}(u, p) = \frac{1}{T} \int_0^T C_D(u, p) dt. \quad (6.3)$$

La fonction objectif modèle, définie par la moyenne temporelle du coefficient de traînée (6.2), évaluée sur le même horizon T , s'écrit quant à elle :

$$\mathcal{J}(\tilde{u}, \tilde{p}) = \frac{1}{T} \int_0^T C_D(\tilde{u}, \tilde{p}) dt. \quad (6.4)$$

On constate que dans l'expression de la fonction objectif modèle (6.4) apparaît le champ de pression \tilde{p} . Les figures 6.1 et 6.2 représentent l'évolution temporelle des coefficients de traînée totale C_D , de traînée de pression C_D^p et de traînée visqueuse C_D^v respectivement dans le cas d'un cylindre stationnaire et dans le cas où une loi de contrôle utilisant les paramètres $A = 2$ et $St = 0,5$ est appliquée au cylindre. Dans les deux cas, la contribution du terme de pression C_D^p est supérieure à 80% de la valeur du coefficient de traînée total C_D . Afin d'obtenir des résultats cohérents, il est de ce fait nécessaire de modéliser le champ de pression de manière précise (§6.3).

6.3 Reconstruction du champ de pression par POD

6.3.1 Détermination d'une base POD pour la pression

Le champ de pression peut être reconstruit à l'aide d'une base réduite POD $\{\Phi_p^{(n)}\}_{n=1, \dots, N_t}$ en utilisant la méthode des snapshots, de manière similaire à ce qui a été fait au chapitre 3 pour les champs de vitesse. Dans la suite de ce paragraphe, la décomposition des champs autour de leur moyenne est utilisée. Nous verrons aux paragraphes 6.4.2 et 6.4.3 que d'autres types de décompositions peuvent être utilisés.

En définissant le vecteur d'état $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t))^T = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^T, p(\mathbf{x}, t))^T$ et la fonction de contrôle $\mathbf{U}_c(\mathbf{x}) = (u_c(\mathbf{x}), v_c(\mathbf{x}), p_c(\mathbf{x}))^T$, le calcul des fonctions de base s'effectue en plusieurs étapes :

1. Détermination du champ de référence $\mathbf{U}_c(\mathbf{x})$ généré par un contrôle unité ($\gamma = 1$) et des conditions aux limites homogènes, et calcul du champ moyen $\mathbf{U}_m(\mathbf{x})$ obtenu par moyenne sur un ensemble de réalisations $\{\mathbf{U}(\mathbf{x}, t_i)\}_{i=1, \dots, N_t}$:

$$\mathbf{U}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \{\mathbf{U}(\mathbf{x}, t_i) - \gamma(\mathbf{c}, t_i) \mathbf{U}_c(\mathbf{x})\}.$$

2. On rappelle (chapitre 1) que $p = P/(\rho U_\infty^2)$.

3. Ces champs pourront être évalués soit par projection des variables d'état sur une base POD, soit par prédiction par un système dynamique d'ordre réduit basé sur la POD.

4. Afin d'obtenir des résultats invariants par translation temporelle, l'évolution du coefficient de traînée est observée à partir de l'instant où le régime d'écoulement est devenu asymptotique. Sans perte de généralités, le temps est alors initialisé à 0, et la période d'observation est $0 \leq t \leq T$.

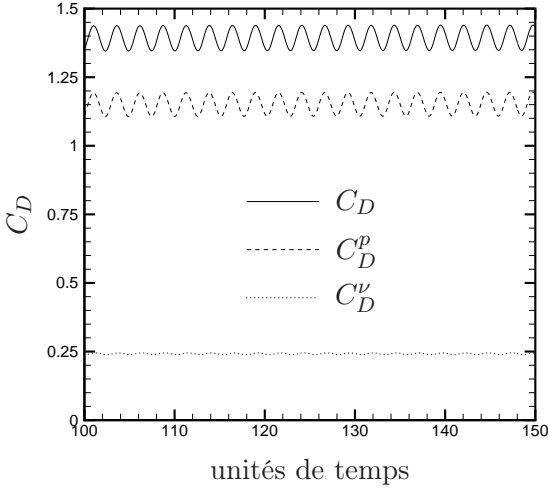


FIGURE 6.1 – Evolution temporelle des coefficients de traînée. Cylindre stationnaire.

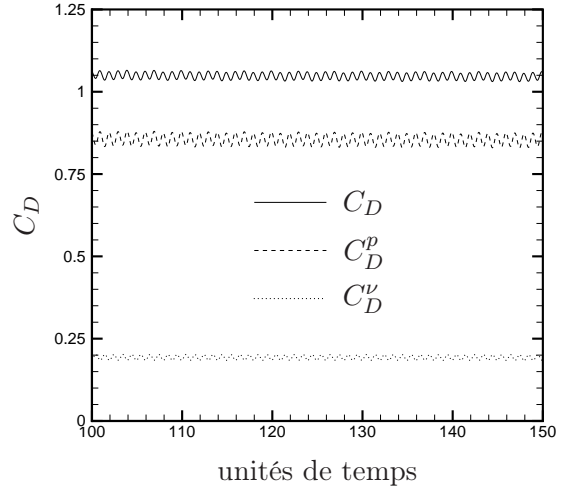


FIGURE 6.2 – Evolution temporelle des coefficients de traînée. Cylindre manipulé: $A = 2$ et $St = 0,5$.

Définition du vecteur \tilde{U}_s :

$$\tilde{U}_s(\mathbf{x}, t_i) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t_i) - \mathbf{U}_m(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{c}, t_i)\mathbf{U}_c(\mathbf{x}).$$

2. Calcul de la matrice de corrélations temporelles C de composantes c_{ij} :

$$c_{ij} = \int_{\Omega} \tilde{U}_s(\mathbf{x}, t_i) \cdot \tilde{U}_s(\mathbf{x}, t_j) d\mathbf{x}.$$

3. Calcul des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_t}$ et des vecteurs propres temporels⁵ $\Psi_1, \dots, \Psi_{N_t}$ de la matrice C .
4. Calcul des fonctions POD spatiales $\Phi_i = (\Phi_i^u, \Phi_i^v, \Phi_i^p)^T$ par combinaison linéaire des vecteurs propres temporels Ψ_i et des réalisations \tilde{U}_s :

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_t} \Psi_i(t_j) \tilde{U}_s(\mathbf{x}, t_j).$$

5. Normalisation des fonctions de base :

$$\Phi_i = \frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|}.$$

Les modes les plus énergétiques, dont la somme représente plus de 99,9% de l'énergie totale, sont alors conservés⁶.

Dans ce qui suit, deux bases POD seront utilisées : la première correspond à un écoulement non contrôlé ($\gamma(t) = 0$) et la seconde correspond à un écoulement forcé par un contrôle sinusoïdal $\gamma(t) = A \sin(2\pi St t)$ d'amplitude $A = 2$ et de fréquence $St = 0,5$.

Afin de construire les bases POD correspondant au cas non contrôlé et au cas contrôlé, des réalisations sont extraites tous les pas de temps égaux à $\Delta t = 0,05$ à partir de l'instant où l'écoulement atteint un régime asymptotique. Ces bases sont respectivement déterminées sur un horizon égal à $T = 15,2$ avec 305 réalisations et sur un horizon égal à $T = 18$ avec 361 réalisations. Pour restituer plus de 99,9% de l'énergie de l'écoulement non contrôlé, respectivement de l'écoulement contrôlé, $N_{gal} = 6$ modes, respectivement $N_{gal} = 14$ modes POD sont conservés.

Les 6 premiers modes de pression pour le cas non contrôlé sont représentés sur la figure 6.3.

5. Chacun des vecteurs propres temporels s'écrit $\Psi_j = (\Psi_j(t_1), \Psi_j(t_2), \dots, \Psi_j(t_{N_t}))^T$.

6. Le critère de sélection des modes POD n'est en fait plus exactement un critère purement énergétique. En effet, il intervient des corrélations pression-pression qui n'ont aucun sens d'un point de vue énergétique.

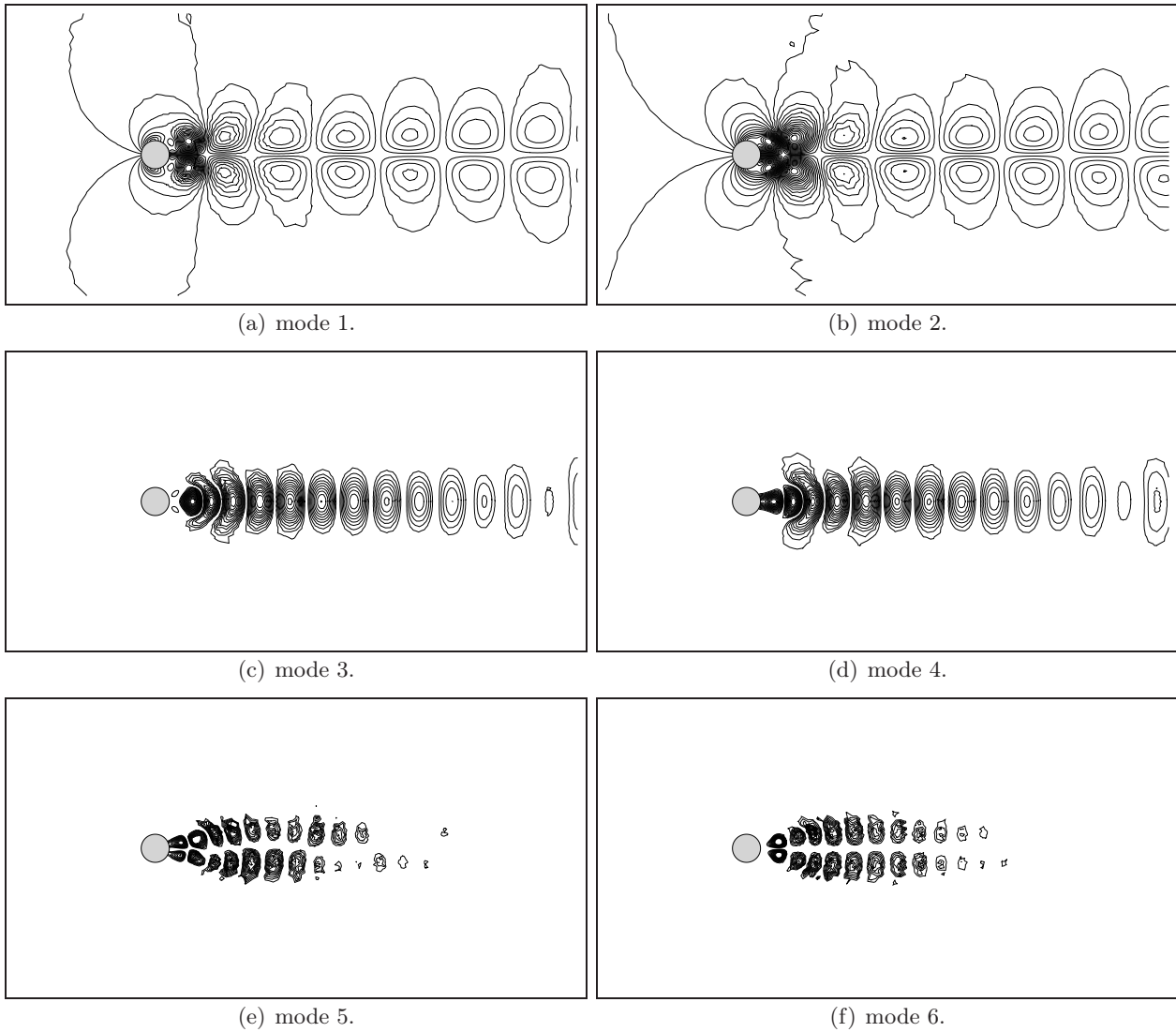


FIGURE 6.3 – Isovaleurs des 6 premiers modes propres de pression en écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$).

6.3.2 Reconstruction du champ de pression par POD

Une méthode vient d'être présentée pour déterminer une base POD pour les champs de vitesse et de pression. Ces champs peuvent alors être approximés sur cette base de la manière suivante :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = u_m(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{c}, t) u_c(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{gat}} a_i(t) \Phi_i^u(\mathbf{x}), \quad (6.5a)$$

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = p_m(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{c}, t) p_c(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{gat}} a_i(t) \Phi_i^p(\mathbf{x}). \quad (6.5b)$$

La fonction de contrôle $\mathbf{U}_c = (u_c, v_c, p_c)^T$ représente la solution du système de Navier-Stokes muni de conditions aux limites homogènes sur toutes les frontières du domaine, excepté sur le cylindre où la vitesse tangentielle γ est constante et égale à 1. La figure 6.4 représente les isovaleurs de la fonction de contrôle pour la composante de vitesse u et pour le champ de pression p .

Afin de vérifier la qualité de la reconstruction temporelle du champ de pression par POD, les erreurs suivantes peuvent être introduites :

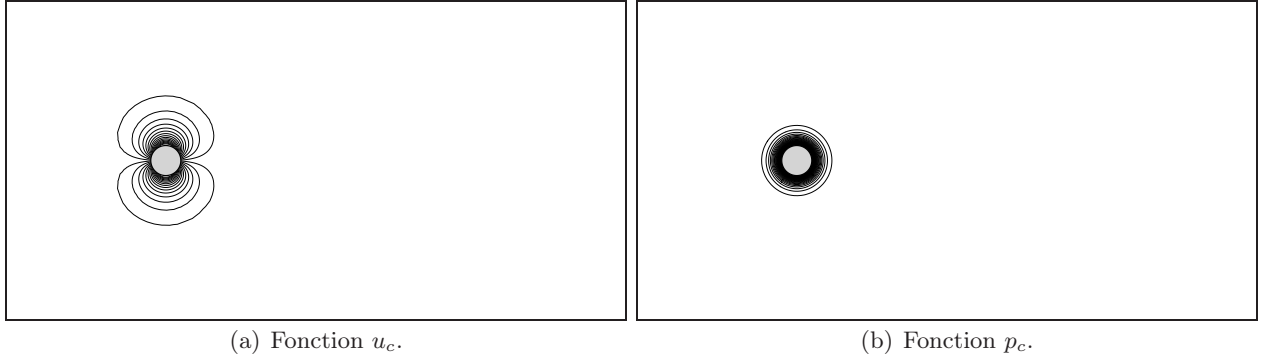


FIGURE 6.4 – Isovaleurs des composantes u et p de la fonction de contrôle.

l'erreur entre le champ de vitesse exact⁷ \mathbf{u} et le champ de vitesse prédit par le modèle réduit POD stabilisé $\tilde{\mathbf{u}}$

$$\tilde{E}_{\mathbf{u}}(t) = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.6a)$$

l'erreur entre le champ de vitesse exact \mathbf{u} et le champ de vitesse obtenu par projection des snapshots sur la base réduite POD $\hat{\mathbf{u}}$

$$\hat{E}_{\mathbf{u}}(t) = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.6b)$$

l'erreur entre le champ de pression exact p et le champ de pression prédit par le modèle réduit POD stabilisé \tilde{p}

$$\tilde{E}_p(t) = \left(\int_{\Omega} (p(\mathbf{x}, t) - \tilde{p}(\mathbf{x}, t))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.6c)$$

et l'erreur entre le champ de pression exact p et le champ de pression obtenu par projection des snapshots sur la base réduite POD \hat{p}

$$\hat{E}_p(t) = \left(\int_{\Omega} (p(\mathbf{x}, t) - \hat{p}(\mathbf{x}, t))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.6d)$$

Les figures 6.5 et 6.6 représentent, pour le cylindre non contrôlé, respectivement les erreurs (6.6a) et (6.6b) sur les champs de vitesse, et les erreurs (6.6c) et (6.6d) sur les champs de pression.

La qualité de la base POD peut être évaluée à l'aide des erreurs (6.6b) et (6.6d) obtenues par projection des réalisations de l'écoulement sur la base. Ces erreurs étant très faibles, la base POD est bien adaptée pour représenter le champ de vitesse et le champ de pression en écoulement non contrôlé. La représentativité du système dynamique construit en utilisant cette base peut être évaluée à l'aide des erreurs (6.6a) et (6.6c) obtenues par prédiction. Ces erreurs sont bien plus importantes que celles obtenues par projection. Cependant, il n'y a pas d'amplification temporelle de celles-ci. Dans les deux cas, l'erreur obtenue sur le champ de pression est du même ordre de grandeur que celle obtenue sur les champs de vitesse⁸, ce qui permet de valider cette technique de reconstruction dans le cas d'un cylindre stationnaire.

Il reste maintenant à vérifier si ces mêmes observations peuvent être effectuées dans le cas où une vitesse tangentielle instationnaire est appliquée au cylindre. Dans ce qui suit, la vitesse tangentielle du cylindre sera de la forme $\gamma(t) = A \sin(2\pi St t)$ avec $A = 2$ et $St = 0,5$.

7. Les champs exacts sont considérés comme étant la solution du modèle de Navier-Stokes (NS).

8. L'erreur commise sur le champ de pression est en fait deux fois plus faible que celle commise sur les champs de vitesse. Ceci s'explique facilement par le fait que l'erreur commise sur les champs de vitesse est la somme des erreurs sur la composante u et sur la composante v .

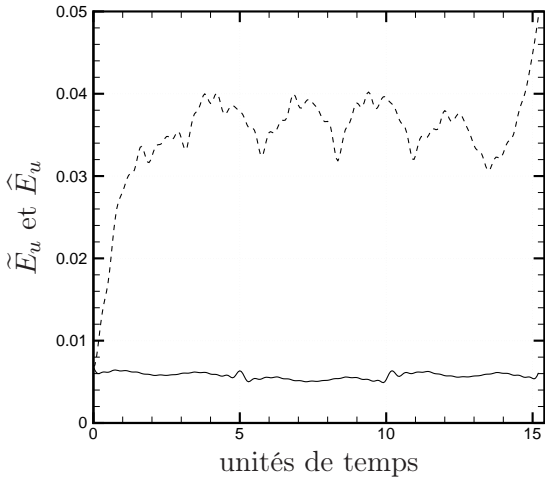


FIGURE 6.5 – Evolution temporelle de l'erreur entre les champs de vitesse POD et NS: — projection et - - - prédiction. Cylindre stationnaire.

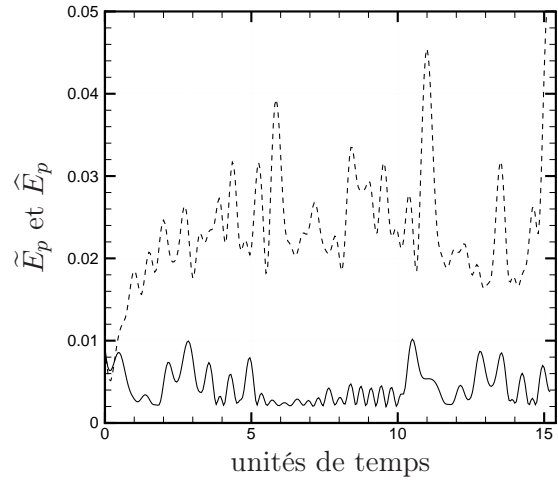


FIGURE 6.6 – Evolution temporelle de l'erreur entre les champs de pression POD et NS: — projection et - - - prédiction. Cylindre stationnaire.

Les figures 6.7 et 6.8 représentent, pour le cylindre manipulé, respectivement les erreurs (6.6a) et (6.6b) sur les champs de vitesse, et les erreurs (6.6c) et (6.6d) sur les champs de pression.

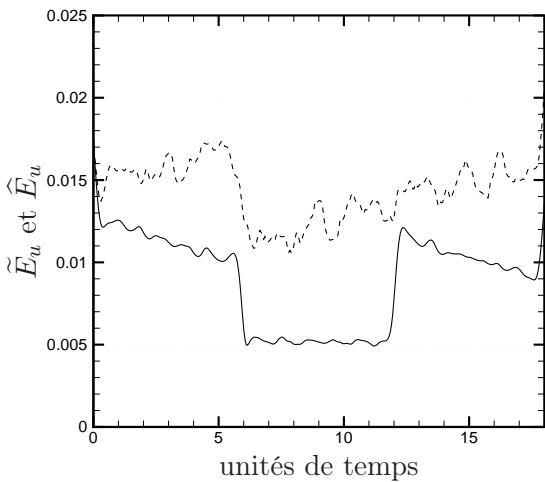


FIGURE 6.7 – Evolution temporelle de l'erreur entre les champs de vitesse POD et NS: — projection et - - - prédiction. $A = 2$ et $St = 0,5$.

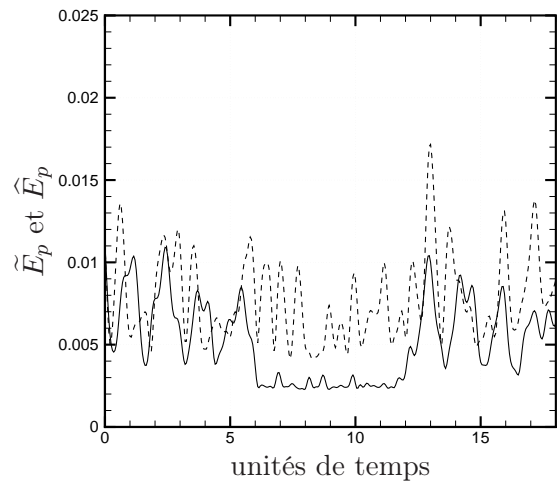


FIGURE 6.8 – Evolution temporelle de l'erreur entre les champs de pression POD et NS: — projection et - - - prédiction. $A = 2$ et $St = 0,5$.

Dans ce cas, encore, il n'y a pas d'amplification temporelle des erreurs de reconstruction, tant sur les champs de vitesse que sur les champs de pression. L'erreur moyenne commise sur les champs de pression est du même ordre de grandeur que celle commise sur les champs de vitesse.

Les fonctions de base POD pour les champs de vitesse et de pression peuvent donc être utilisées pour reconstruire ces grandeurs physiques dans l'optique de modéliser l'évolution temporelle du coefficient de traînée (6.2).

6.4 Reconstruction de la fonction objectif par POD

L'objectif de cette étude étant de modéliser la moyenne du coefficient de traînée sur un horizon fini T en utilisant un modèle réduit POD, nous pouvons définir l'opérateur *de traînée* \mathcal{C}_D , conformément à la définition du coefficient de traînée rappelée au paragraphe 6.2. Pour tout vecteur $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ de \mathbb{R}^3 , cet opérateur s'écrit⁹ :

$$\mathcal{C}_D : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u} \mapsto 2 \int_{\Gamma_c} \left(u_3 n_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u_1}{\partial x} n_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u_1}{\partial y} n_y \right) d\Gamma. \quad (6.7)$$

En particulier, on constate que si le champ vectoriel correspond aux variables solutions du modèle de Navier-Stokes, soit $\mathbf{U} = (u, v, p)^T$, le coefficient de traînée s'écrit simplement $C_D = \mathcal{C}_D(\mathbf{U})$.

Si les variables d'état POD sont utilisées, le coefficient de traînée peut être évalué comme une somme des valeurs prises par l'opérateur linéaire (6.7) appliqué aux différents champs vectoriels présents dans les relations (6.5). En utilisant les champs vectoriels $\mathbf{U}_m = (u_m, v_m, p_m)^T$, $\mathbf{U}_c = (u_c, v_c, p_c)^T$ et $\Phi_i = (\Phi_i^u, \Phi_i^v, \Phi_i^p)^T$, et afin de simplifier les notations futures, on pose :

$$L = \mathcal{C}_D(\mathbf{U}_m), \quad (6.8a)$$

$$M = \mathcal{C}_D(\mathbf{U}_c), \quad (6.8b)$$

$$N_i = \mathcal{C}_D(\Phi_i). \quad (6.8c)$$

d'où

$$\begin{aligned} C_D(t) &= \mathcal{C}_D(\mathbf{U}) = \mathcal{C}_D(\mathbf{U}_m) + \gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{C}_D(\mathbf{U}_c) + \sum_{i=1}^{N_{gat}} a_i(t) \mathcal{C}_D(\Phi_i) \\ &= L + \gamma(\mathbf{c}, t) M + \sum_{i=1}^{N_{gat}} a_i(t) N_i. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le champ vectoriel \mathbf{U}_c étant pré-déterminé et constant, la contribution M est une constante, et ce, quels que soient les paramètres de contrôle appliqués. De plus, dans cette étude, du fait de sa symétrie (figure 6.4), le champ \mathbf{U}_c n'a aucune contribution sur les coefficients aérodynamiques, et donc $M \equiv 0$. Les coefficients L et N_i dépendent pour leurs parts des paramètres de contrôle utilisés pour construire le modèle d'ordre faible POD, car la détermination du champ moyen \mathbf{U}_m et des fonctions de base POD Φ_i dépend implicitement de l'écoulement (contrôlé) étudié.

Par la suite, plusieurs décompositions des champs de vitesse et de pression vont être utilisées pour construire des modèles d'ordre réduit POD. En particulier, la qualité et la robustesse de la modélisation du coefficient de traînée utilisant ces différents modèles seront étudiées. Deux décompositions classiques seront tout d'abord utilisées, à savoir une décomposition des champs vectoriels sur une base POD de fluctuations autour du champ moyen (§6.4.1), puis une décomposition sur une base POD incorporant le champ moyen (§6.4.2). Ensuite, afin d'augmenter la robustesse du modèle réduit POD envers des évolutions dynamiques, les champs seront décomposés sur une base où de nouveaux modes, dits modes de non-équilibre ou modes de translation (Noack *et al.*, 2003, 2004), seront artificiellement ajoutés (§6.4.3).

Plusieurs tests seront alors effectués. Tout d'abord, nous essaierons de modéliser l'évolution temporelle du coefficient de traînée associé au contrôle utilisé pour construire le modèle d'ordre réduit. Ensuite, nous tenterons d'améliorer la robustesse de la fonction objectif définie comme le coefficient de traînée moyen, afin de modéliser les coefficients de traînée associés à des paramètres de contrôle situés dans un voisinage de ceux utilisés pour construire le modèle d'ordre faible (et *a fortiori* pour construire les coefficients N_i).

⁹ L'ensemble de départ de l'opérateur \mathcal{C}_D est en réalité \mathbb{R}^2 . Cependant, pour être homogène avec la définition des champs vectoriels $\mathbf{U} = (u, v, p)$, nous supposons, sans perte de généralité, que son ensemble de départ est \mathbb{R}^3 .

Les tests seront effectués sur deux bases POD. La première est construite pour un écoulement non contrôlé, et la seconde pour un écoulement correspondant au forçage $\gamma(t) = A \sin(2\pi St t)$, d'amplitude $A = 2$ et de nombre de Strouhal $St = 0,5$. Les paramètres utilisés pour construire ces bases sont identiques à ceux utilisés précédemment. La robustesse de la fonction objectif, définie comme étant la moyenne du coefficient de traînée reconstruit en utilisant un modèle réduit POD sur un horizon fini T , sera étudiée dans un voisinage des paramètres de contrôle $A = 2$ et $St = 0,5$.

6.4.1 Fonctions de base en champs fluctuants

Dans un premier temps, les champs de vitesse et de pression sont décomposés sur une base POD construite à partir des champs fluctuants déterminés autour du champ moyen \mathbf{U}_m . Les décompositions suivantes sont alors utilisées :

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_m(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{c}, t) \mathbf{U}_c(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}). \quad (6.10)$$

L'introduction de la décomposition des champs vectoriels (6.10) dans le système de Navier-Stokes (1.3) conduit, après projection de Galerkin sur les fonctions Φ_i , à un système dynamique de dimension réduite N_{gal} donnant l'évolution temporelle des coefficients de prédiction POD. Le système dynamique POD ainsi construit est le suivant (voir § 4.3.2) :

$$\begin{aligned} \frac{da_i(t)}{dt} = & \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d\gamma(t)}{dt} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma(t) + \mathcal{G}_i \gamma(t)^2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Les coefficients qui interviennent dans ce système sont donnés aux sections 4.3.1 et 4.3.2. Ils dépendent implicitement des paramètres de contrôle γ utilisés dans la décomposition (6.10), par l'intermédiaire du champ moyen et des fonctions de base POD. Quand tous les coefficients sont déterminés, le système (6.11) peut être intégré en utilisant des paramètres de contrôle γ différents de ceux utilisés pour construire la base POD. Une autre dynamique, éventuellement dégradée, peut ainsi être modélisée.

L'intégration de ce système dynamique permet de modéliser l'évolution temporelle du coefficient de traînée $C_D(t) = \mathcal{C}_D(\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t))$ de la manière suivante (voir équation 6.9) :

$$C_D(t) = L + \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) N_i. \quad (6.12)$$

En développant l'expression précédente, on obtient :

$$C_D(t) = \underbrace{L}_{\substack{\text{traînée moyenne} \\ \text{constante}}} + \underbrace{a_1(t) N_1}_{\text{fluctuation}} + \underbrace{a_2(t) N_2}_{\text{fluctuation}} + \cdots + \underbrace{a_{N_{gal}}(t) N_{N_{gal}}}_{\text{fluctuation}}. \quad (6.13)$$

Pour simplifier les notations futures, on note $C'_D(t) = \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) N_i$ les fluctuations du coefficients de traînée.

L'évolution temporelle du coefficient de traînée s'écrit alors :

$$C_D(t) = L + C'_D(t). \quad (6.14)$$

On remarque que, quels que soient les paramètres de contrôle appliqués, le coefficient de traînée fluctue autour de la valeur du coefficient de traînée L obtenue par l'écoulement moyen associé aux paramètres de contrôle utilisés pour construire le modèle réduit. Le coefficient de traînée évolue temporellement avec des amplitudes et des fréquences imposées par l'évolution temporelle des coefficients de prédiction POD $\{a_i\}_{i=1, \dots, N_{gal}}$ et par les coefficients N_i .

La fonction objectif, définie comme la moyenne du coefficient de traînée sur un horizon fini T , s'écrit¹⁰ :

$$\tilde{\mathcal{J}}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T C_D(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (L + C'_D(t)) dt = L. \quad (6.15)$$

Quels que soient les paramètres de contrôle utilisés pour résoudre (6.11), la fonction objectif sera constante et égale à la valeur du coefficient de traînée moyen généré par les paramètres de contrôle utilisés pour construire le modèle d'ordre réduit. La décomposition (6.10) n'est donc pas adaptée pour restituer la valeur moyenne du coefficient de traînée obtenu par application de paramètres de contrôle différents de ceux utilisés pour construire le modèle réduit POD. Il paraît nécessaire d'introduire le champ moyen comme un mode POD afin de prendre en compte les variations de la traînée moyenne en fonction des paramètres de contrôle appliqués.

6.4.2 Fonctions de base avec champs moyens

Les champs de vitesse et de pression sont ici décomposés sur une base POD incorporant le champ moyen \mathbf{U}_m :

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{c}, t) \mathbf{U}_c(\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}), \quad (6.16)$$

Le terme $a_0(t)N_0$ intervenant dans la somme $\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})$ est représentatif du champ moyen \mathbf{U}_m . Ce dernier est maintenant résolu par le système dynamique d'ordre faible, de dimension $N_{gal} + 1$, suivant :

$$\begin{aligned} \frac{da_i(t)}{dt} &= \sum_{j=0}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}} \sum_{k=0}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ &+ \mathcal{D}_i \frac{d\gamma(t)}{dt} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma(t) + \mathcal{G}_i \gamma(t)^2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Les expressions analytiques des coefficients présents dans le système (6.17) sont identiques à celles présentées aux sections 4.3.1 et 4.3.2, en posant $\mathbf{U}_m = \mathbf{0}$.

Après intégration du système (6.17) pour déterminer les coefficients $a_i(t)$, l'évolution temporelle du coefficient de traînée est donnée par :

$$C_D(t) = \sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) N_i. \quad (6.18)$$

En isolant les termes de fluctuation du terme représentatif du champ moyen, on obtient :

$$C_D(t) = \underbrace{a_0(t)N_0}_{\substack{\text{évolution de la traînée moyenne} \\ \text{très faiblement instationnaire}}} + \underbrace{a_1(t)N_1}_{\text{fluctuation}} + \cdots + \underbrace{a_{N_{gal}}(t)N_{N_{gal}}}_{\text{fluctuation}}. \quad (6.19)$$

La fonction objectif est définie par :

$$\tilde{\mathcal{J}}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T a_0(t) N_0 dt,$$

et le coefficient de traînée (6.18) peut être modélisé par :

$$C_D(t) = \tilde{\mathcal{J}}_2 + C'_D(t). \quad (6.20)$$

Dans le cas où le système dynamique (6.17) est résolu avec une excitation $\gamma(t)$, identique à celle utilisée pour construire le modèle d'ordre faible, le coefficient a_0 est approximativement égal à une constante. Le

10. Si T correspond à la durée de prise des échantillons contenus dans la base de données POD et si la dynamique est située sur l'attracteur Navier-Stokes alors on vérifie exactement $\frac{1}{T} \int_0^T a_i(t) dt = 0$. Sinon, pour des temps T suffisamment long, on vérifie $\frac{1}{T} \int_0^T a_i(t) dt \rightarrow 0$.

champ moyen tend alors vers $a_0 \Phi_0$ et la valeur de la fonction objectif modèle converge vers L . Cependant, lorsqu'une excitation différente est appliquée, le terme a_0 dépend implicitement de ces paramètres de contrôle par l'intermédiaire du système dynamique POD (6.17), et ainsi la fonction objectif $\tilde{\mathcal{J}}_2$ évolue légèrement avec le contrôle.

En utilisant la décomposition (6.16), la fonction objectif correspond à la contribution d'un seul mode propre POD. Afin d'augmenter la robustesse de cette fonction, des modes supplémentaires peuvent être artificiellement ajoutés.

6.4.3 Fonctions de base avec modes de non-équilibre

Les modes POD de non-équilibre sont ajoutés à la base POD existante afin d'obtenir d'autres directions d'évolution que celles présentes dans la base initiale. Afin de conserver l'orthonormalité des fonctions de base POD, ces modes sont ajoutés à l'aide d'une procédure de Gram-Schmidt décrite par l'algorithme 3. Le choix des modes de non-équilibre sera également discuté. Ces modes, appelés également modes de translation, ont principalement été utilisés pour étudier des bifurcations de système dynamique par POD. Dans une étude concernant la stabilité de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, Noack *et al.* (2003) utilisent un mode de translation correspondant à l'écoulement de base stationnaire instable pour $Re > 49$. L'ajout de ce mode permet de passer de l'écoulement stationnaire stable ($Re < 49$) à l'écoulement instationnaire stable ($49 \leq Re < 190$), et inversement. Plus récemment, Noack *et al.* (2004) proposent d'utiliser des modes de non-équilibre afin de modéliser des évolutions dynamiques dans des procédures de contrôle.

Les champs de vitesse et de pression peuvent se décomposer sur la base propre POD, augmentée en ajoutant N_{neq} modes de non-équilibre, de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{c}, t) \mathbf{U}_c(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes de non-équilibre}} . \quad (6.21)$$

Le système dynamique d'ordre réduit, de dimension $N_{gal} + N_{neq} + 1$, est alors de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{da_i(t)}{dt} = & \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d\gamma(t)}{dt} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma(t) + \mathcal{G}_i \gamma(t)^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

La table 6.1 représente les caractères physiques et dynamiques des différents modes présents dans la décomposition (6.21). On peut noter que la fonction de contrôle \mathbf{U}_c est pré-déterminée, et donc n'est pas affecté par des changements de dynamique au cours d'une procédure de contrôle. Le mode correspondant à l'écoulement moyen \mathbf{U}_m n'est habituellement pas résolu par le système dynamique POD car il est constant en temps. Cependant, lorsque des modes de non-équilibre sont introduits, ce dernier peut être pris en compte dans le système dynamique car il peut avoir un régime transitoire, traduit par des échanges d'énergie avec les modes de non-équilibre. L'évolution temporelle des coefficients de prédiction POD qui correspondent aux modes Galerkin et aux modes de non-équilibre est obtenue par résolution d'un système dynamique d'ordre réduit, augmenté par la présence des modes de non-équilibre. Ces modes sont introduits pour améliorer la robustesse du modèle d'ordre réduit envers des évolutions dynamiques pouvant intervenir par application du contrôle.

La figure 6.9 représente schématiquement l'utilisation d'un mode de non équilibre pour modéliser la transition d'une dynamique I vers une autre dynamique II . On constate que l'écoulement moyen (mode Φ_0) et les fluctuations peuvent être différentes. Il faut alors rajouter un vecteur de translation pouvant faire évoluer l'écoulement d'une dynamique à l'autre, au moins en moyenne. Ce vecteur de translation correspond à $\Phi_{neq}^{I \rightarrow II} = \Phi_0^{II} - \Phi_0^I$.

Si la dynamique correspondant à l'état I est connue, il est tout à fait possible que la dynamique correspondant à l'état II soit inconnue, notamment dans des procédures d'optimisation utilisant des modèles d'ordre faible. Il paraît donc nécessaire de rajouter des modes de translation traduisant d'autres directions de l'espace physique contrôlé, initialement non prises en compte dans les modes Galerkin. Il convient alors

Aspects physiques	Modes	Aspects dynamiques
fonction de contrôle	U_c	dynamique pré-déterminée
mode écoulement moyen	$U_m, i = 0$	$a_0 = Cste$
modes POD Galerkin correspondent à la physique de l'écoulement	$i = 1$	Système dynamique modes déterminés par intégration du système dynamique (le mode $i = 0$ peut également être résolu et $a_0 \equiv a_0(t)$)
	$i = 2$	
	\dots	
	$i = N_{gal}$	
modes de non-équilibre correspondent à des directions privilégiées	$i = N_{gal} + 1$	
	\dots	
	$i = N_{gal} + N_{neq}$	

TABLE 6.1 – *Descriptif des aspects physiques et dynamiques des modes présents dans la décomposition sur la base POD, augmentée des modes de non-équilibre.*

d'entourer la dynamique I par plusieurs dynamiques II, III, IV etc... généralisant des directions non prises en compte dans le système POD initial (sans modes de translation). N_{neq} modes de non-équilibre, correspondant à différents champs moyens¹¹ choisis plus ou moins aléatoirement dans l'espace de contrôle, peuvent être ajoutés. On peut considérer par exemple :

- dynamique I : écoulement contrôlé avec les paramètres $A = 2$ et $St = 0,5$,
- dynamique II : écoulement contrôlé avec les paramètres $A = 4$ et $St = 0,1$,
- dynamique III : écoulement non contrôlé $A = 0$,
- dynamique IV : écoulement de base stationnaire instable¹².

La figure 6.10 représente en lignes de courant certains modes Galerkin et modes de non-équilibre pouvant être utilisés dans la décomposition (6.21). En particulier, les modes suivants y sont représentés :

- mode Galerkin correspondant au champ contrôlé moyen I (figure 6.10(a)),
- mode contrôlé moyen II (figure 6.10(d)),
- mode naturel moyen III (figure 6.10(g)),
- mode correspondant à l'écoulement de base stationnaire instable IV (figure 6.10(j)),
- fonction de contrôle (figure 6.10(k)),
- mode de non équilibre entre le champ contrôlé moyen I et le champ contrôlé moyen II (figure 6.10(m)),
- mode de non équilibre entre le champ contrôlé moyen I et le champ naturel moyen III (figure 6.10(n)),
- mode de non équilibre entre le champ contrôlé moyen I et le mode correspondant à l'écoulement de base stationnaire instable IV (figure 6.10(o)).

Algorithme 3 (Construction de modes de non équilibre)

La construction de modes de non équilibre utilise un procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On désire construire un mode de non équilibre, traduisant la translation entre l'état d'équilibre (champ moyen) associé à une dynamique contrôlée (I) et l'état d'équilibre (champ moyen) associé à une autre dynamique contrôlée (II), qui soit orthogonal aux directions pré-existantes dans la base POD. L'écoulement correspondant à la dynamique I est résolu pour construire une base POD $\{\Phi_i^I\}_{i=0,\dots,N_{gal}}$. L'écoulement correspondant à la dynamique II est également résolu pour déterminer le mode moyen Φ_0^{II} .

La première étape consiste à calculer le vecteur translation entre le champ moyen I et le champ moyen II :

$$\Phi_a^{I \rightarrow II} = \Phi_0^{II} - \Phi_0^I. \quad (6.23a)$$

A partir de ce vecteur, il reste à en construire un autre qui complète la base POD en une famille orthogonale :

11. Il est possible également de générer des directions de champs fluctuants, mais ceci est hors de propos ici, au vue de la fonction objectif étudiée. L'ajout de directions de fluctuations augmenterait, de plus, considérablement la dimension du système dynamique d'ordre faible. De ce fait, l'utilisation d'un tel système perdrait de son attrait.

12. D'après Protas (2000); Protas et Wesfreid (2002), l'écoulement de base stationnaire instable est l'écoulement générant le plus faible coefficient de traînée moyen pour un nombre de Reynolds fixé (voir figure 1.29).

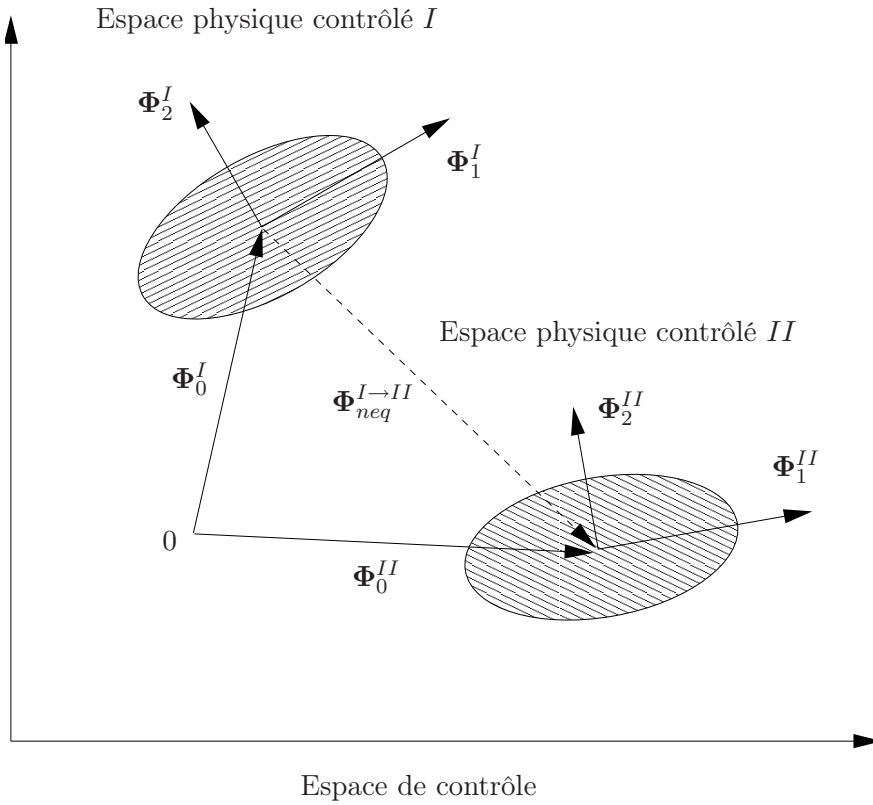


FIGURE 6.9 – Représentation schématisée d'une transition de dynamique par utilisation d'un mode moyen de non-équilibre. Pour des raisons de clarté, l'espace physique est réduit à trois directions : une direction pour l'écoulement moyen et deux directions pour les champs fluctuants.

$$\Phi_b^{I \rightarrow II} = \Phi_a^{I \rightarrow II} - \sum_{i=0}^{N_{gal}} (\Phi_a^{I \rightarrow II}, \Phi_i^I)_{\Omega} \Phi_i^I. \quad (6.23b)$$

Afin de rendre la base orthonormale, le vecteur précédent est normalisé :

$$\Phi_0^{I \rightarrow II} = \frac{\Phi_b^{I \rightarrow II}}{\|\Phi_b^{I \rightarrow II}\|_{\Omega}}. \quad (6.23c)$$

Ce vecteur peut ensuite être ajouté à la base POD existante, afin de former une nouvelle base orthonormale ayant une dimension augmentée d'une unité :

$$\Phi_{N_{gal}+1}^I \equiv \Phi_0^{I \rightarrow II}. \quad (6.23d)$$

Si l'on désire ajouter un autre mode de non-équilibre ($\Phi_0^{I \rightarrow III}$) à la base POD, on pose $N_{gal} = N_{gal} + 1$ et on recommence la procédure avec une nouvelle dynamique III en lieu et place de la dynamique II.

L'intégration du système (6.22) permet de modéliser l'évolution temporelle du coefficient de traînée de la manière suivante :

$$C_D(t) = \sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) N_i + \sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i. \quad (6.24)$$

En séparant les termes *a priori* constants (faiblement instationnaires) des termes fluctuants (fortement instationnaires), l'évolution temporelle du coefficient de traînée s'écrit :

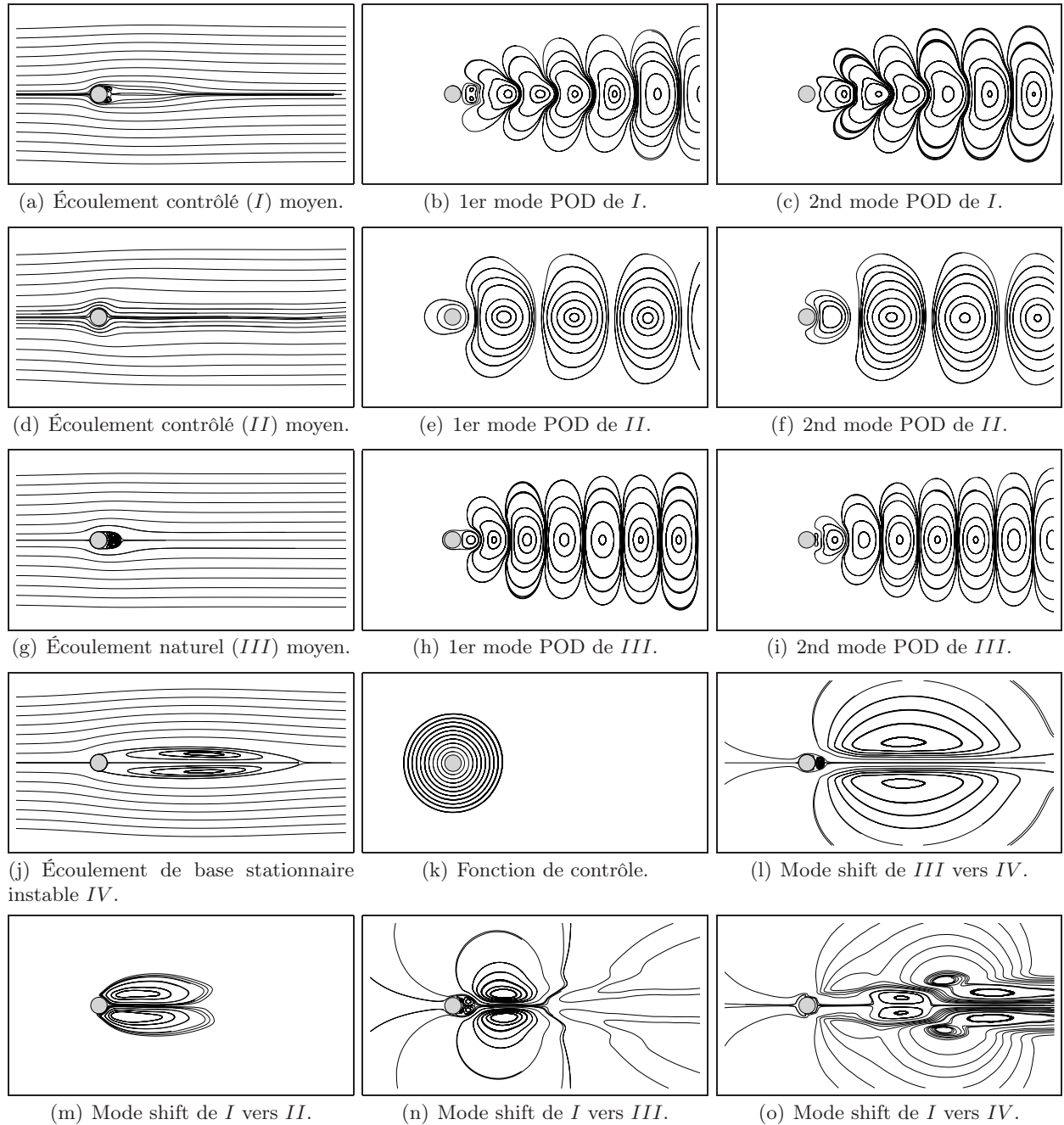


FIGURE 6.10 – Représentation des modes Galerkin (a), (b) et (c), de la fonction de contrôle \mathbf{u}_c (k), et de modes de non-équilibre (m), (n), (o) pouvant être utilisés dans la décomposition dynamique (6.21). Tous les modes sont représentés par des lignes de courant à $Re = 200$.

$$\begin{aligned}
 C_D(t) = & \underbrace{a_0(t)N_0 + a_{N_{gal}+1}(t)N_{N_{gal}+1} + \cdots + a_{N_{gal}+N_{neq}}(t)N_{N_{gal}+N_{neq}}}_{\text{évolution de la traînée moyenne}} \\
 & + \underbrace{a_1(t)N_1 + a_2(t)N_2 + \cdots + a_{N_{gal}}(t)N_{N_{gal}}}_{\text{fluctuations}}.
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

La fonction objectif peut alors être définie de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{J}}_3 = \frac{1}{T} \int_0^T (a_0(t)N_0 + a_{N_{gal}+1}(t)N_{N_{gal}+1} + \dots + a_{N_{gal}+N_{neq}}(t)N_{N_{gal}+N_{neq}}) dt, \quad (6.26)$$

et le coefficient de traînée (6.25) peut être modélisé par :

$$C_D(t) = \tilde{\mathcal{J}}_3 + C'_D(t). \quad (6.27)$$

Si le système dynamique (6.22) est résolu avec une excitation $\gamma(t)$ correspondant à celle utilisée pour construire le modèle d'ordre faible, le coefficient a_0 est approximativement égal à une constante et les termes $\{a_i\}_{i=N_{gal}+1, \dots, N_{gal}+N_{neq}}$ sont tous identiquement nuls. Le champ moyen tend donc vers $a_0\Phi_0$ et la valeur de la fonction objectif converge vers L .

Si par contre le système dynamique (6.22) est résolu avec une excitation $\gamma(t)$ différente de celle utilisée pour construire le modèle d'ordre faible, il est possible que les modes de non-équilibre $\{a_i\}_{i=N_{gal}+1, \dots, N_{gal}+N_{neq}}$ et le mode a_0 correspondant au champ moyen interagissent entre eux.

6.4.4 Résultats des différentes approches

Si l'excitation $\gamma(t)$ utilisée pour intégrer les systèmes dynamiques (6.11), (6.17) et (6.22) correspond à l'excitation utilisée pour construire le modèle d'ordre faible, les trois développements (6.13), (6.19) et (6.25) sont équivalents. En effet, les termes $a_0\Phi_0$ présents dans les relations (6.19) et (6.25) sont approximativement égaux¹³ aux champs moyens U_m , et les amplitudes des coefficients temporels a_i pour $i = N_{gal} + 1, \dots, N_{gal} + N_{neq}$ présents dans la relation (6.25) sont très faibles¹⁴ devant les amplitudes des autres coefficients de Galerkin a_i . Les valeurs des fonctions objectif modèles $\tilde{\mathcal{J}}_1$, $\tilde{\mathcal{J}}_2$ et $\tilde{\mathcal{J}}_3$ évaluées pour les paramètres de contrôle utilisés lors de la construction du modèle réduit sont de ce fait quasiment égales. Les évolutions temporelles des coefficients de traînée, dans le cas non contrôlé et dans le cas où un contrôle sinusoïdale d'amplitude $A = 2$ et de fréquence $St = 0,5$ est appliqué, sont respectivement représentées sur les figures 6.11 et 6.13. On constate sur ces figures une très bonne concordance entre les évolutions temporelles du coefficient de traînée réel et du coefficient de traînée reconstruit en utilisant les modes temporels projetés sur la base POD (construit avec 99,9% de l'énergie totale). La très légère différence observable sur les figures 6.12 et 6.14 est due aux modes POD non pris en compte dans le système dynamique, représentant 0,1% de l'énergie totale de l'écoulement. L'évolution temporelle du coefficient de traînée obtenu par prédiction POD (intégration du système dynamique 6.11 par exemple) est aussi en bon accord avec l'évolution temporelle de coefficient de traînée réel, avec cependant une erreur plus importante comme le montrent les figures 6.12 et 6.14. Cette erreur traduit le fait que les modes temporels projetés et prédits ne sont pas exactement identiques (voir § 4.4.2). Il n'y a cependant pas d'amplification temporelle de l'erreur de reconstruction. Outre la valeur moyenne du coefficient de traînée (fonction objectif), l'amplitude et la fréquence des oscillations sont également très bien prédites par un modèle d'ordre faible POD.

Il est maintenant nécessaire de vérifier si les fonctions objectif peuvent être utilisées afin de modéliser des comportements correspondants à des dynamiques différentes de celle utilisée pour construire le modèle d'ordre faible.

La loi de contrôle $\gamma = A \sin(2\pi St t)$ correspondant aux paramètres $A = 2$ et $St = 0,5$ est utilisée dans les décompositions (6.10), (6.16) et (6.21) pour construire les systèmes dynamiques réduits (6.11), (6.17) et (6.22). Ces systèmes dynamiques sont ensuite intégrés avec des paramètres de contrôle se situant dans le domaine $\mathcal{D} = \{1,5 \leq A \leq 2,5 ; 0,4 \leq St \leq 0,6\}$: les valeurs des fonctions objectifs modèles $\tilde{\mathcal{J}}_1$, $\tilde{\mathcal{J}}_2$ et $\tilde{\mathcal{J}}_3$ qui correspondent à ces paramètres de contrôle peuvent en être déduites.

La figure 6.15 représente les évolutions de la fonction objectif réelle \mathcal{J} et des fonctions objectif modèles $\tilde{\mathcal{J}}_1$, $\tilde{\mathcal{J}}_2$ et $\tilde{\mathcal{J}}_3$ en fonction des paramètres d'étude compris dans \mathcal{D} .

La fonction objectif réelle, représentée sur la figure 6.15(a), possède une vallée menant vers le minimum dans le domaine d'étude \mathcal{D} . Le minimum de la fonction objectif réelle atteint une valeur égale à 1,027 correspondant aux paramètres de contrôle $A = 2,5$ et $St = 0,6$. La vallée menant au minimum part d'une

13. Il n'existe à notre connaissance aucune preuve mathématique. C'est l'expérience de reconstruction qui le prouve.

14. Ces coefficients représentent une partie des résidus des modes Galerkin non pris en compte dans le système POD. L'amplitude moyenne de ces modes (environ 10^{-4} dans notre étude) diminue quand le nombre de modes Galerkin retenu dans le système dynamique POD augmente.

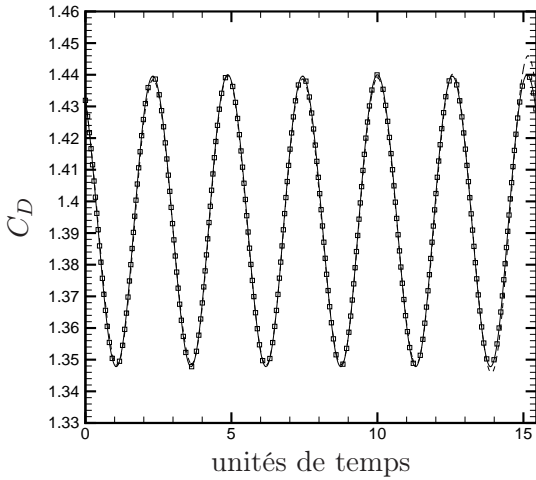


FIGURE 6.11 – Evolution temporelle des coefficients de traînée : \square réel (NS), — projeté (POD) et - - - prédit (POD). Cylindre stationnaire.

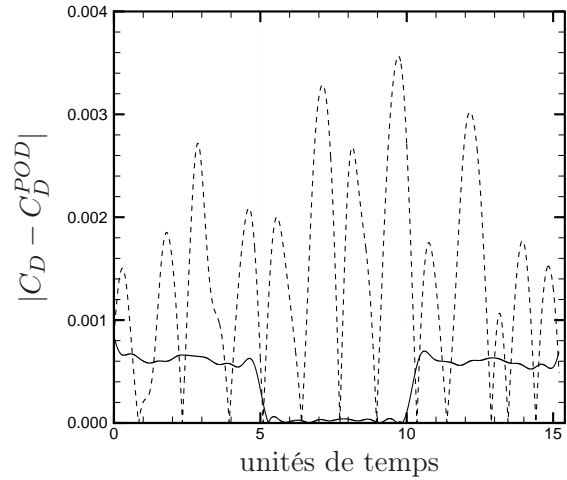


FIGURE 6.12 – Evolution temporelle de l'erreur absolue entre les coefficients de traînée POD et NS : — projeté et - - - prédit. Cylindre stationnaire.

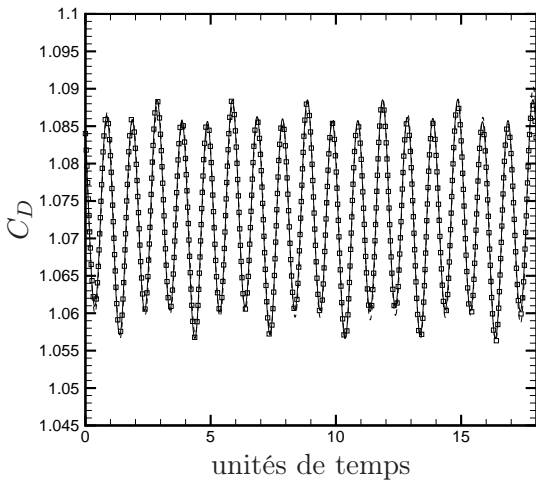


FIGURE 6.13 – Evolution temporelle des coefficients de traînée : \square réel (NS), — projeté (POD) et - - - prédit (POD). Cylindre contrôlé.

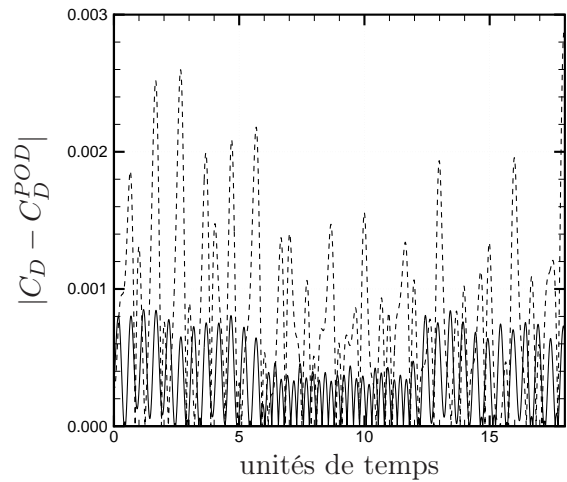


FIGURE 6.14 – Evolution temporelle de l'erreur absolue entre les coefficients de traînée POD et NS : — projeté et - - - prédit. Cylindre contrôlé.

valeur égale à 1,14 pour $A = 1,5$ et $St = 0,4$ et est entourée par deux pics situés en $A = 2,5$ et $St = 0,4$ et en $A = 1,5$ et $St = 0,6$, ayant pour valeurs respectives 1,18 et 1,28. La valeur de la fonction objectif réelle obtenue pour les paramètres de contrôle utilisés pour construire le modèle POD ($A = 2$ et $St = 0,5$) est égale à 1,058.

On constate que la fonction objectif modèle $\tilde{\mathcal{J}}_1$ est incapable de représenter la fonction objectif réelle pour d'autres paramètres de contrôle que ceux utilisés pour construire le modèle d'ordre réduit. Quels que soient les paramètres de contrôle appliqués, la fonction $\tilde{\mathcal{J}}_1$ est constante et égale à la valeur de la fonction objectif réelle obtenue pour les paramètres $A = 2$ et $St = 0,5$.

La fonction objectif modèle $\tilde{\mathcal{J}}_2$ n'est qualitativement pas représentative de la fonction \mathcal{J} . Cette fonction possède un minimum obtenu pour des paramètres de contrôle $A = 2,5$ et $St = 0,4$ ne correspondant pas aux

paramètres obtenus pour le minimum de la fonction objectif réelle, mais le maximum est atteint pour les mêmes paramètres dans les deux cas, à savoir $A = 1,5$ et $St = 0,6$. La fonction objectif modèle $\tilde{\mathcal{J}}_2$ présente une décroissance quasi-linéaire dans le sens de la plus grande pente, en moyenne, de la fonction réelle \mathcal{J} . Cette linéarité peut s'expliquer par le fait qu'une seule direction spatiale caractérise la fonction $\tilde{\mathcal{J}}_2$ (le mode Φ_0).

La fonction objectif modèle $\tilde{\mathcal{J}}_3$, quant à elle, représente très bien le comportement global de la fonction objectif réelle \mathcal{J} . Dans la zone des paramètres de contrôle étudiée, le minimum de la fonction objectif réelle atteint une valeur égale à 1,027 pour $A = 2,5$ et $St = 0,6$. Le minimum atteint par la fonction objectif modèle vaut 1,021 pour les mêmes paramètres de contrôle. Les vallées menant au minimum sont qualitativement identiques dans les deux cas. Bien que l'allure des vallées menant au minimum soient semblables, les valeurs des maxima sont toutefois assez différentes. La fonction $\tilde{\mathcal{J}}_3$ semble néanmoins assez robuste envers les évolutions dynamiques qui peuvent intervenir dans le processus d'optimisation itératif.

Pour cette raison, dans la suite de cette étude, la fonction objectif $\tilde{\mathcal{J}}$ est choisie comme étant égale à la fonction objectif $\tilde{\mathcal{J}}_3$.

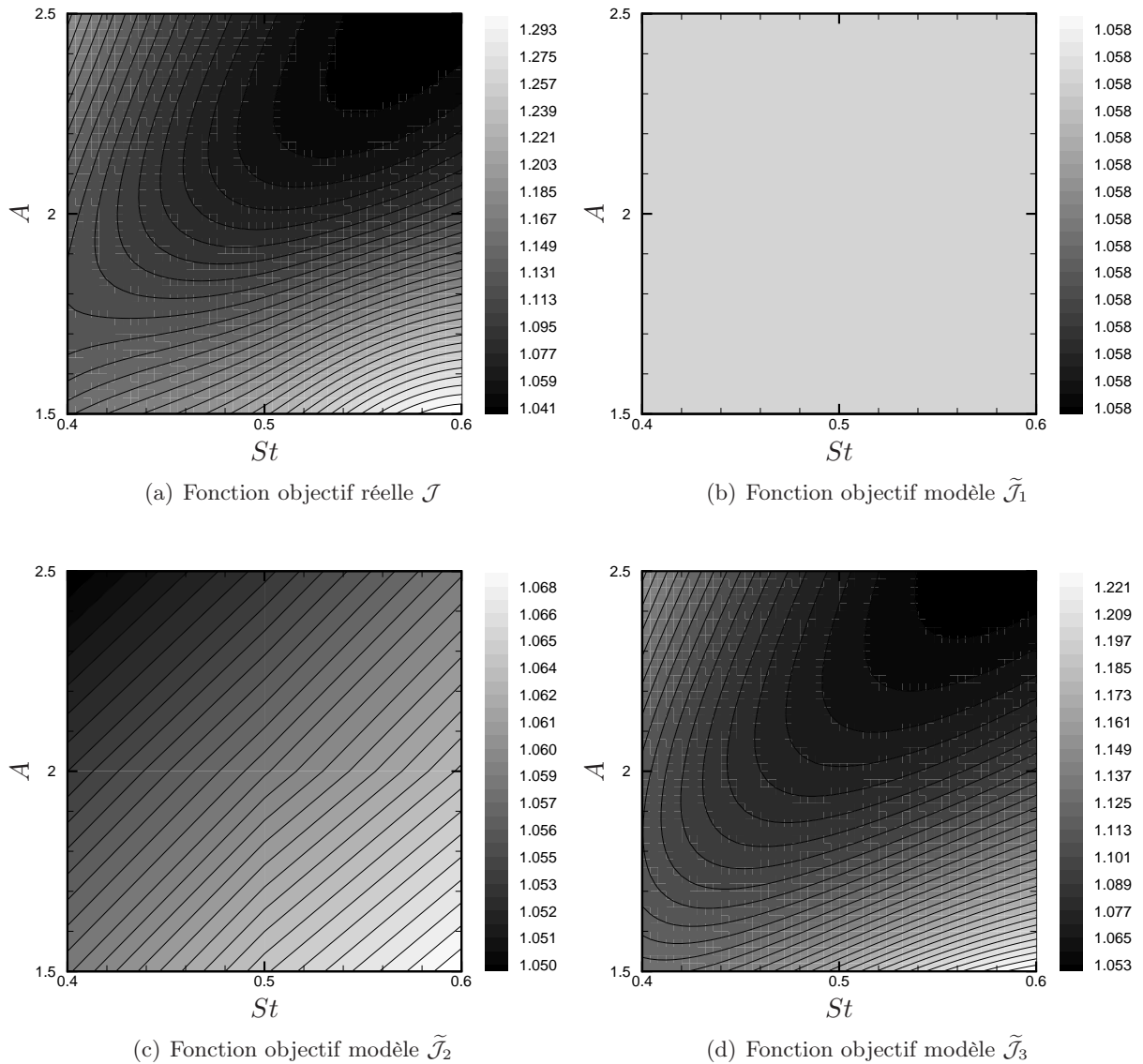


FIGURE 6.15 – Représentation de la fonction objectif réelle et des trois fonctions objectif modèles représentatives de la moyenne du coefficient de traînée.

6.5 Méthode adaptative POD

La méthode d'optimisation adaptative utilisée dans cette étude est décrite à la section 6.5.1. Un point essentiel de cette méthode est la résolution d'un système optimal d'ordre réduit (§ 6.5.3) construit au paragraphe 6.5.2.

6.5.1 Processus de résolution

Les étapes principales de la procédure adaptative peuvent être complètement décrites par les points suivants.

Initialisations La procédure d'optimisation adaptative basée sur la POD est initialisée par des paramètres de contrôle $\mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{c}_0$. Ces derniers sont définis par l'utilisateur.

Résolution des équations de Navier-Stokes Pour un contrôle $\mathbf{c}^{(k)}$ courant, les équations de Navier-Stokes sont résolues. À partir de l'instant où le régime d'écoulement est devenu asymptotique, une période T , qui dépend de la fréquence de contrôle St , est fixée, au cours de laquelle des réalisations $\mathcal{U}^{(k)}$ des champs de vitesse et de pression sont extraites, et au cours de laquelle la valeur de la fonction objectif réelle $\mathcal{J}^{(k)}$ est évaluée.

Construction d'une base POD À l'aide de ces réalisations, il est possible de déterminer une base propre POD pour chacune des composantes de vitesse et de pression. La procédure à suivre est décrite au paragraphe 6.3.

Construction et résolution du système optimal d'ordre réduit Avec cette base POD, un système optimal d'ordre réduit peut être construit (§ 6.5.2). Les paramètres de contrôle $\mathbf{c}^{(k)}$ sont utilisés en entrée d'un processus d'optimisation, décrit en détail au paragraphe 6.5.3. De nouveaux paramètres de contrôle optimaux $\mathbf{c}^{(k+1)}$ ainsi que de nouveaux coefficients temporels POD $\mathbf{a}^{(k+1)}$ sont fournis en sortie de cette phase d'optimisation. Avec ces paramètres, la valeur de la fonction objectif modèle $\tilde{\mathcal{J}}^{(k+1)}$ est évaluée.

Test de convergence et réactualisation de la base POD Tant que la décroissance entre la valeur de la fonction objectif réelle $\mathcal{J}^{(k)}$ et la valeur de la fonction objectif modèle $\tilde{\mathcal{J}}^{(k+1)}$ obtenue pour les paramètres de contrôle optimaux est jugée suffisante, le nouveau contrôle $\mathbf{c}^{(k+1)}$ est utilisé pour générer de nouvelles réalisations de l'écoulement $\mathcal{U}^{(k+1)}$. Ainsi, la base POD peut être réactualisée afin de s'adapter aux évolutions dynamiques qui interviennent durant le processus d'optimisation. Lorsque cette décroissance n'est plus jugée satisfaisante, la procédure est arrêtée.

Le lecteur intéressé pourra se référer à Ravindran (2000a) et à Afanasiev et Hinze (2001) pour des versions légèrement différentes de cet algorithme. Ravindran (2000b) et Afanasiev et Hinze (2001) ne se réfèrent jamais à la fonction objectif réelle : mais comme il a été démontré à la section 6.4, la différence entre les valeurs des fonctions objectif réelle et modèle est très faible. Le critère de convergence est également différent dans chaque étude. Enfin, pour améliorer la représentativité de la base POD, Afanasiev et Hinze (2001) et Hinze et Volkwein (2004) proposent d'ajouter les nouvelles réalisations de l'écoulement, $\mathcal{U}^{(k+1)}$, aux anciennes réalisations, $\mathcal{U}^{(k)}$. Ceci devant être effectué à chaque itération de la méthode adaptative, la taille de la base POD pourrait considérablement augmenter. Dans cette étude, les nouvelles réalisations ne seront pas ajoutées au jeu constitué par les anciennes réalisations, mais elles constitueront un nouveau jeu.

La procédure d'optimisation adaptative POD décrite précédemment est synthétisée par l'algorithme 4, et représentée schématiquement par la figure 6.16.

Algorithme 4 (Procédure d'optimisation POD adaptative)

Choix de paramètres de contrôle $\mathbf{c}^{(0)} = (A^{(0)}, St^{(0)})^T$ initiaux et d'un paramètre ε arbitrairement petit. $k = 0$.

1. Détermination d'un jeu de réalisations $\mathcal{U}^{(k)}$ qui correspond au contrôle $\mathbf{c}^{(k)}$, et évaluation de la fonction objectif réelle $\mathcal{J}^{(k)}$.
2. Construction d'une base POD associée au contrôle $\mathbf{c}^{(k)}$.

3. Détermination et résolution du système optimal, constitué du système d'état (6.28), du système adjoint (6.32) et des conditions d'optimalité (6.33). Cette résolution peut être effectuée à l'aide du processus itératif décrit par l'algorithme 5. Obtention de nouveaux paramètres de contrôle $\mathbf{c}^{(k+1)}$, et évaluation de la fonction objectif modèle $\tilde{\mathcal{J}}^{(k+1)}$.
4. Si $|\mathcal{J}^{(k)} - \tilde{\mathcal{J}}^{(k+1)}| < \varepsilon$, arrêt de l'algorithme. Sinon, $k = k + 1$, et retour à l'étape 1.

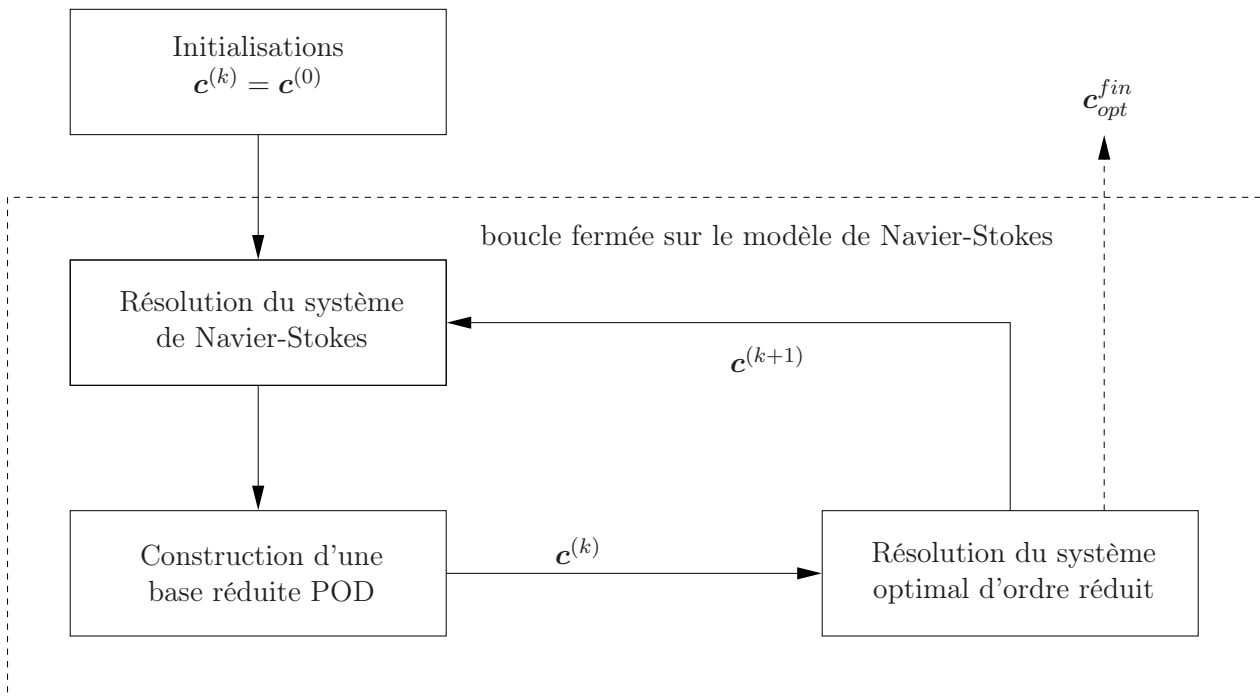


FIGURE 6.16 – Représentation schématique de la méthode d'optimisation adaptative POD en boucle fermée.

Les principales étapes de la méthode adaptative viennent d'être décrites. Il reste à présenter le point central de cette méthode, soit la construction (§ 6.5.2) puis la résolution (§ 6.5.3) d'un système optimal d'ordre réduit.

6.5.2 Formulation contrôle optimal

Différentes méthodes qui permettent de construire le système optimal associé à la minimisation d'une fonction coût sont décrites au paragraphe 2.4. Le système optimal est ici construit par application de la méthode des multiplicateurs de Lagrange (voir § 2.4.1). L'objectif est de minimiser le coefficient de traînée moyen sous des contraintes imposées par un système réduit POD. En raison de sa plus grande représentativité dynamique, on utilise le système réduit (6.22) incluant des modes de non-équilibre.

Equations d'état

On rappelle que le système d'état gouvernant l'évolution temporelle des fonctions propres POD avec modes de non-équilibre, et modélisant un régime d'écoulement contrôlé (§ 6.4.3), s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d a_i(t)}{d t} = & \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{d t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma(\mathbf{c}, t) + \mathcal{G}_i \gamma^2(\mathbf{c}, t), \end{aligned} \quad (6.28a)$$

muni des conditions initiales suivantes :

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \phi_i(\mathbf{x})). \quad (6.28b)$$

L'intégration de ce système, sur un horizon fini, de $t = 0$ à $t = T$, est suivie par une étape de stabilisation numérique par ajout de viscosités tourbillonnaires sur chaque mode POD (§ 4.4.2).

En passant tous les termes dans le membre de gauche, le système (6.28a) s'écrit :

$$\mathcal{N}_i(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \mathbf{0}.$$

Fonctionnelle objectif

Dans cette étude, les paramètres de contrôle \mathbf{c} sont recherchés dans l'optique de rendre le coefficient de traînée moyen minimal sous les contraintes du système d'état (6.28). La fonction objectif peut s'écrire de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{J}}_3(\mathbf{a}) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(a_0(t) N_0 + \sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i \right) dt. \quad (6.29)$$

Cependant, pour des facilités d'écriture, les termes $\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) N_i$ peuvent également être pris en compte dans la fonction objectif¹⁵. Finalement, en posant

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i,$$

cette dernière peut s'écrire :

$$\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{T} \int_0^T J(\mathbf{a}) dt. \quad (6.30)$$

Un terme de pénalisation peut éventuellement être introduit afin de prendre en compte le coût lié au contrôle : ceci ne sera cependant pas réalisé dans cette étude car le minimum global est recherché indépendamment du coût lié au contrôle. En se référant à la cartographie du coefficient de traînée moyen en fonction des paramètres de contrôle A et St (figure A.1), il semble que la fonction définie par le coefficient de traînée moyen possède un minimum global, au moins dans la zone étudiée ($0 \leq A \leq 6$ et $0 \leq St \leq 1$).

Fonctionnelle de Lagrange

Le problème d'optimisation avec contraintes est transformé en un problème d'optimisation sans contrainte. Une nouvelle fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lagrange, est alors introduite, dans laquelle les contraintes sont forcées par des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\xi}$, de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}) = \int_0^T \left(J(\mathbf{a}) - \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \xi_i \mathcal{N}_i(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \right) dt. \quad (6.31)$$

¹⁵ L'influence de ces termes est très minime. Ces termes représentent des fluctuations, et donc $\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) N_i dt \simeq 0$.

Le problème consiste maintenant à rendre cette nouvelle fonctionnelle stationnaire.

En utilisant la technique d'optimisation basée sur les multiplicateurs de Lagrange présentée à la section 2.4.1, nous pouvons déterminer les équations gouvernant l'évolution temporelle des variables adjointes ξ , ainsi que les conditions d'optimalité.

Equations adjointes

Le système gouvernant l'évolution temporelle des variables adjointes est :

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = - \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a_k(t) \right) \xi_j(t) - \frac{1}{T} N_i, \quad (6.32a)$$

muni des conditions terminales suivantes :

$$\xi_i(T) = 0. \quad (6.32b)$$

Ce système étant doté de conditions terminales, il doit être intégré en temps rétrograde, de $t = T$ à $t = 0$.

Conditions d'optimalité

En définissant

$$\mathcal{L}_i = - \frac{d\xi_i}{dt} \mathcal{D}_i + \xi_i \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{G}_i \right),$$

on obtient l'expression des conditions d'optimalité :

$$\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{L} = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \nabla_{\mathbf{c}} \gamma dt. \quad (6.33)$$

Cette relation peut se projeter respectivement sur les directions constituées par les paramètres de contrôle, A et St , pour obtenir :

▷ Par rapport à l'amplitude

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \sin(2\pi St t) dt. \quad (6.34a)$$

▷ Par rapport au nombre de Strouhal

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial St} = \int_0^T 2\pi A t \left(\sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \cos(2\pi St t) dt. \quad (6.34b)$$

On rappelle que ces conditions du premier ordre sont égales à zéro uniquement au minimum de la fonction objectif.

6.5.3 Résolution du système optimal

Le système optimal, constitué du système d'état (6.28), du système adjoint (6.32), et des conditions d'optimalité (6.33), peut être résolu par une méthode directe, appelée aussi méthode à un tir. Dans cette méthode, on considère que toutes ces équations forment un système unique. Ravindran (2000b), par exemple, utilise une méthode de Newton pour résoudre ce type de système, dans le but d'optimiser une zone de recirculation en aval d'une marche descendante. Cette méthode est cependant très difficile à mettre en œuvre numériquement, et le temps de calcul qui lui est associée peut rapidement devenir prohibitif. Dans la plupart des cas, une méthode itérative, décrite à la section 2.4.1, semble plus appropriée. Une description détaillée de cette

méthode itérative est donnée dans ce qui suit.

Par la suite, on repère respectivement par les indices n et k , les itérations sur le modèle d'ordre réduit et celles sur le système Navier-Stokes (voir figure 6.17). Les paramètres de contrôle $\mathbf{c}^{(n)} = \mathbf{c}^{(k)}$ sont utilisés en entrée du système optimal. A l'aide de ces paramètres, il est possible de résoudre le système d'état constitué par le modèle d'ordre faible POD (6.28). La solution de ce système fournit l'évolution temporelle des variables d'état $\mathbf{a}^{(n)}$. Avec les paramètres de contrôle $\mathbf{c}^{(n)}$, et connaissant l'évolution temporelle des variables d'état $\mathbf{a}^{(n)}$, l'évolution temporelle des variables adjointes $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ est obtenue par résolution du système adjoint (6.32) en temps rétrograde. A partir de l'instant où les paramètres de contrôle $\mathbf{c}^{(n)}$ et les évolutions temporelles des variables d'état $\mathbf{a}^{(n)}$ et adjointes $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ sont connus, les conditions d'optimalité (6.33) peuvent être évaluées. L'évaluation de ces conditions fournit une quantité représentative du gradient de la fonction objectif par rapport aux variables de contrôle. Cette quantité est ensuite utilisée pour déterminer une direction de descente à l'aide d'un algorithme d'optimisation, laissé au choix de l'utilisateur. Une revue des algorithmes d'optimisation peut être trouvée en annexe C ainsi que dans Nocedal et Wright (1999). Une recherche linéaire le long de cette direction de descente fournit des paramètres de contrôle $\mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c}^{(n+1)}$ réduisant la valeur de la fonctionnelle objectif. Si un critère de convergence est vérifié, ces paramètres de contrôle sont donnés en sortie du processus de résolution du système optimal, et sont utilisés pour initialiser une nouvelle étape de la méthode adaptative. Sinon, une nouvelle résolution du système optimal est effectuée.

Ce processus de résolution itératif du système optimal est synthétisée par l'algorithme 5.

Algorithme 5 (Résolution itérative du système optimal)

En entrée du processus itératif, on a les paramètres de contrôle $\mathbf{c}^{(n)} = \mathbf{c}^{(k)}$.

1. *En utilisant les derniers paramètres de contrôle obtenus, on résout le système POD ROM (6.28) en temps croissant pour obtenir les variables d'état $\mathbf{a}(t)$.*
2. *En utilisant les variables d'état déterminées en 1, on résout les équations adjointes (6.32) en temps décroissant pour obtenir les variables adjointes $\boldsymbol{\xi}(t)$.*
3. *En utilisant les variables d'état et les variables adjointes respectivement déterminées en 1 et 2, on évalue la condition d'optimalité (6.33) pour obtenir la quantité $\nabla_{\mathbf{c}} \tilde{\mathcal{J}}^{(n)}$.*
4. *A partir de cette estimation, on calcule de nouveaux paramètres de contrôle*

$$\mathbf{c}^{(n+1)} = \mathbf{c}^{(n)} - \omega^{(n)} \mathbf{d}^{(n)}$$

où $\mathbf{d}^{(n)}$ est une direction de descente construite à l'aide du gradient $\nabla_{\mathbf{c}} \tilde{\mathcal{J}}^{(n)}$ et où $\omega^{(n)}$ est un pas à effectuer le long de cette direction de descente.

5. *Si un critère de convergence est vérifié, on arrête le processus itératif, sinon on retourne à l'étape 1.*

La méthode d'optimisation adaptative basée sur la résolution de systèmes optimaux d'ordre réduit est maintenant complètement décrite. Nous pouvons maintenant l'appliquer à notre configuration.

6.6 Résultats de la méthode adaptative POD

Dans une première partie, les résultats obtenus par la méthode adaptative décrite précédemment seront présentés (§ 6.6.1). On montrera ensuite que certaines précautions doivent être prises. En particulier, il semble nécessaire de réduire le domaine de validité des modèles réduits POD dans l'espace des paramètres de contrôle. Une restriction de ce domaine, implémentée dans la méthode adaptative POD, permet d'augmenter grandement la qualité des résultats (§ 6.6.2).

6.6.1 Résultats du processus d'optimisation adaptatif POD

Dans cette étude, des premiers essais ont été réalisés en utilisant les algorithmes 4 et 5 sans aucune précaution, comme l'ont fait Ravindran (2000b) et Afanasiev et Hinze (2001). Les résultats numériques sont présentés sur la table 6.2. Les valeurs A , St et \mathcal{J} représentent respectivement l'amplitude et le nombre de Strouhal utilisés pour construire le modèle réduit POD, ainsi que la valeur de la fonction objectif réelle obtenue

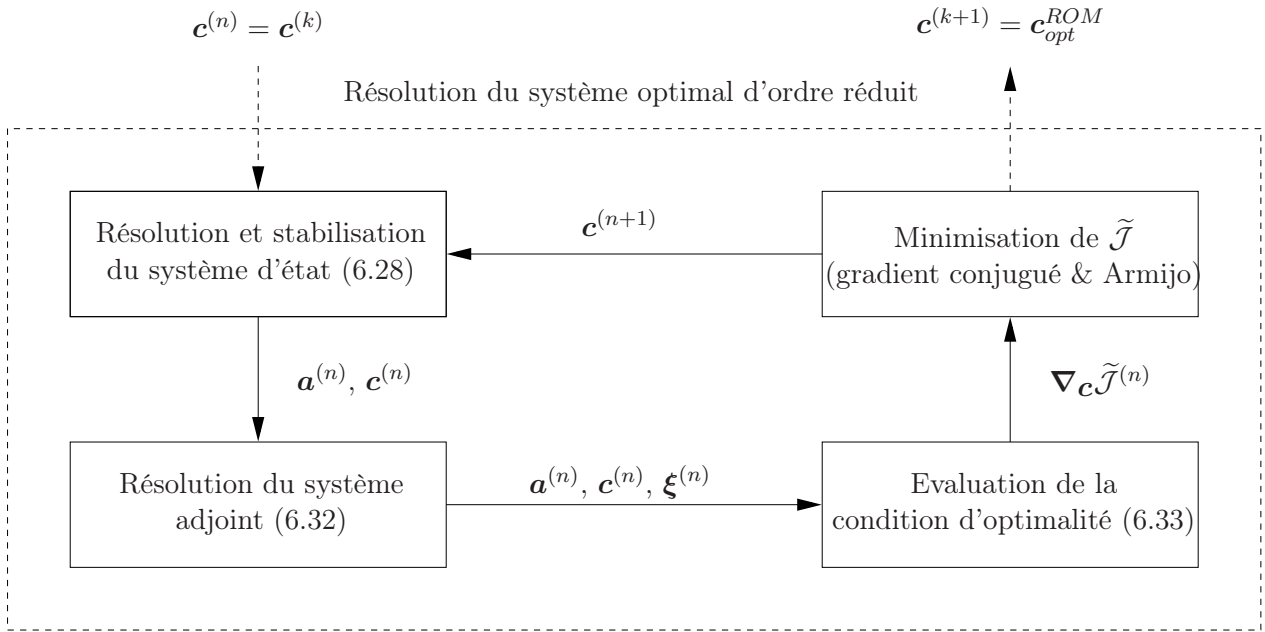


FIGURE 6.17 – Représentation schématique du processus de résolution du système optimal d'ordre réduit.

pour ces valeurs des paramètres de contrôle. Les valeurs A^{opt} , St^{opt} et $\tilde{\mathcal{J}}^{opt}$ représentent respectivement l'amplitude et le nombre de Strouhal obtenus par résolution du système optimal réduit, ainsi que la valeur de la fonction objectif obtenue pour ces paramètres de contrôle "optimaux". Lorsque la valeur NaN ¹⁶ apparaît, cela signifie que l'intégration de l'équation (6.28a) a divergé : les valeurs A^{opt} et St^{opt} ne correspondent alors plus aux valeurs optimales des paramètres de contrôle, mais aux valeurs à partir desquelles le système a divergé. Après quelques itérations non satisfaisantes de l'algorithme 4, reportées sur la table 6.2, les paramètres de contrôle A^{opt} et St^{opt} s'éloignent des paramètres de contrôle A et St courants dans le processus d'optimisation (présenté par l'algorithme 5). Ainsi, le système (6.28) ne peut plus être intégré et diverge rapidement. Ceci est dû au fait que la base POD utilisée pour construire le modèle réduit n'est plus en mesure de représenter la nouvelle dynamique rencontrée dans le processus d'optimisation.

Itéré	A	St	\mathcal{J}	A^{opt}	St^{opt}	$\tilde{\mathcal{J}}^{opt}$
1	2,000	0,500	1,200	2,958	0,696	1,058
2	2,958	0,696	1,023	4,111	0,971	0,942
3	4,111	0,971	1,053	12,93	2,342	NaN

TABLE 6.2 – Evolution des valeurs des paramètres de contrôle et de la fonction objectif au cours du processus adaptatif POD.

On peut cependant raisonnablement espérer que le modèle d'ordre réduit soit également représentatif d'une dynamique proche. Dans cette optique, une amélioration (§ 6.6.2) peut être apportée à l'algorithme 5.

6.6.2 Restriction du domaine de validité du contrôle d'un modèle réduit POD

Comme nous venons de le voir, les paramètres de contrôle ne doivent pas trop s'éloigner de leurs valeurs initiales dans le processus d'optimisation décrit par l'algorithme 5. Deux solutions sont alors envisageables : soit il est possible de pénaliser la fonction objectif en imposant un coût important lié au contrôle, soit il est possible de restreindre le domaine de validité du modèle réduit dans l'algorithme 5. Dans cette étude, la

16. L'abréviation NaN correspond à "Not A Number".

deuxième solution est retenue. L'algorithme proposé par Ravindran (2000b) doit de ce fait être modifié, en rajoutant une contrainte supplémentaire sur le domaine de validité du modèle réduit en fonction de l'amplitude du contrôle.

On suppose donc que chaque paramètre de contrôle est susceptible d'être recherché dans une région définie par l'utilisateur. La contrainte peut être traduite mathématiquement par la relation

$$\|\mathbf{c}^{(n+1)} - \mathbf{c}^{(n)}\| \leq \mathbf{r}, \quad (6.35)$$

où \mathbf{r} est un vecteur constitué des rayons des régions dans lesquelles la recherche des paramètres de contrôle est autorisée.

Pour différents vecteurs \mathbf{r} , les fonctions objectif et modèles sont représentées sur la figure 6.18. On constate que si la norme du vecteur est trop grande, la fonction modèle n'est plus assez robuste pour représenter fidèlement la fonction objectif.

En accord avec la figure 6.18, on peut convenir de retenir $\mathbf{r} = (1; 0,2)^T$. Cependant, pour plus de précisions, on choisira $\mathbf{r} = (0,5; 0,1)^T$ dans la suite de cette étude.

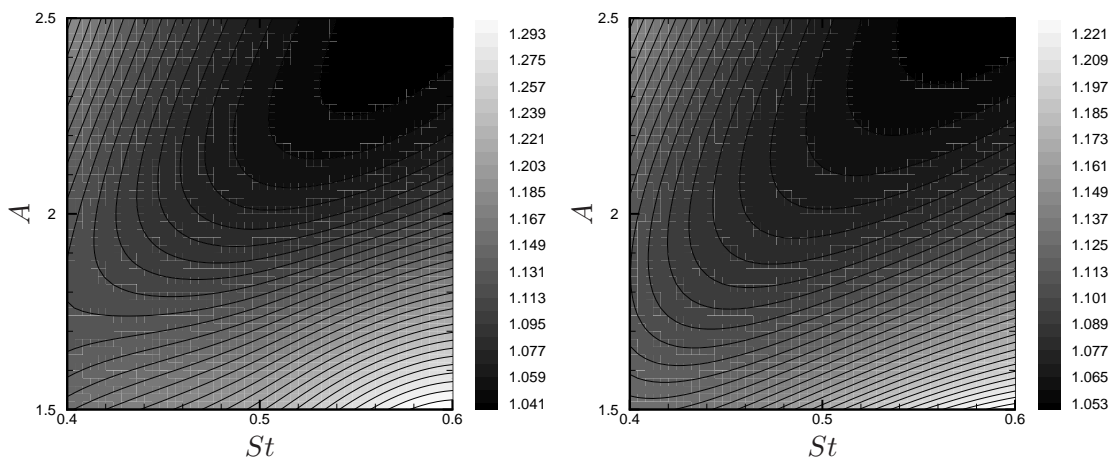
Ce paragraphe présente maintenant les résultats de la minimisation du coefficient de traînée moyen par la méthode adaptative contrainte par la relation (6.35).

Afin d'évaluer la robustesse de cette méthode, différents paramètres de contrôle initiaux $\mathbf{c}_0 = (A; St)$ seront utilisés. La région des paramètres de contrôle étudiée est représentée sur la carte A.1. Les paramètres initiaux sont choisis près des extrémités de cette zone d'étude, à savoir $\mathbf{c}_0 = (1,0; 0,2)$, $\mathbf{c}_0 = (1,0; 1,0)$, $\mathbf{c}_0 = (6,0; 0,2)$ et $\mathbf{c}_0 = (6,0; 1,0)$.

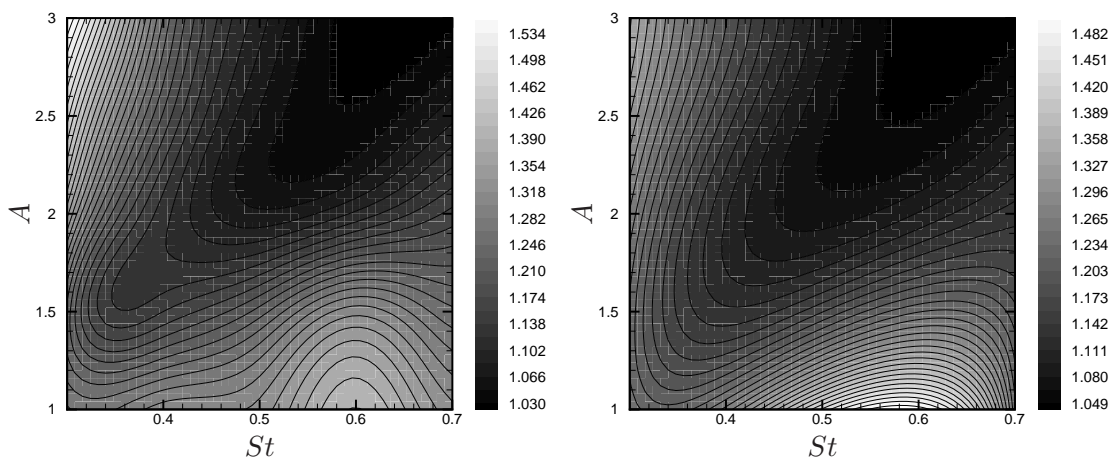
Itéré	A	St	\mathcal{J}	$\tilde{\mathcal{J}}$
0	1,000	0,200	1,43919	1,44694
1	1,500	0,300	1,24054	1,29806
2	2,000	0,400	1,12813	1,21080
3	2,500	0,500	1,06376	1,10660
4	3,000	0,600	1,01897	1,05075
5	3,500	0,700	0,99763	1,02489
6	3,000	0,600	1,01897	1,05075
7	3,500	0,700	0,99763	1,02489
8	3,000	0,600	1,01897	1,05075
9	3,500	0,700	0,99763	1,02489
10	3,000	0,600	1,01897	1,05075
11	3,500	0,700	0,99763	1,02489
12	3,000	0,600	1,01897	1,05075
13	3,500	0,700	0,99763	1,02489
14	3,000	0,600	1,01897	1,05075
15	3,500	0,700	0,99763	1,02489

TABLE 6.3 – *Processus d'optimisation par méthode adaptative contrainte. Evolution en fonction des itérés des valeurs des paramètres de contrôle, des fonctionnelles objectif \mathcal{J} et modèle $\tilde{\mathcal{J}}$. Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.*

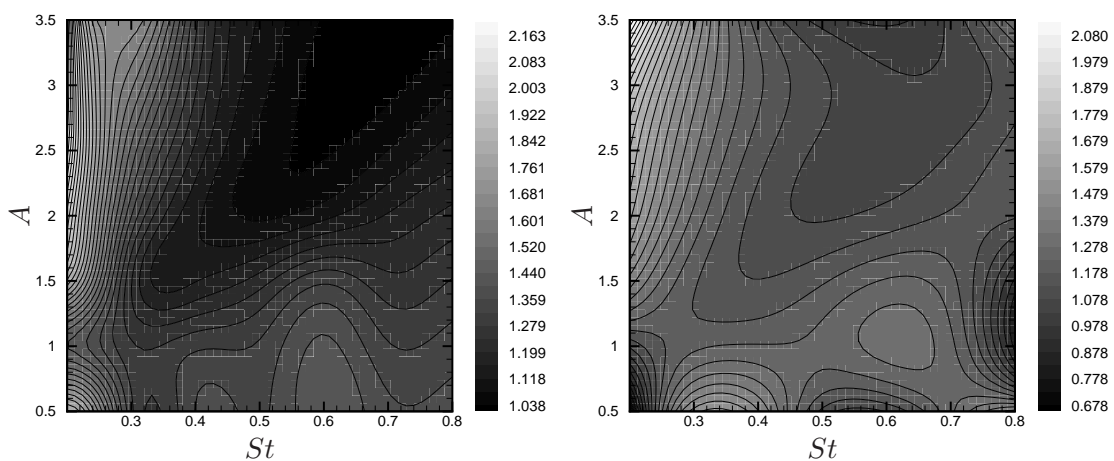
On constate sur les tables 6.4, 6.5 et 6.6 que le couplage des algorithmes 4 et 5 contraints par la relation (6.35) améliore grandement les résultats. En effet, les valeurs numériques obtenues ne divergent plus. Cependant, la convergence n'est pas atteinte. Les figures 6.25, 6.29 et 6.33 représentent l'évolution de l'amplitude de forçage durant le processus d'optimisation. L'amplitude de forçage oscille entre des valeurs comprises entre $A = 4$ et $A = 4,5$, soit une valeur moyenne égale à 4,25. Les figures 6.26, 6.30 et 6.34 représentent quant à elles l'évolution de la fréquence de forçage pendant le processus d'optimisation. Cette fréquence oscille autour des valeurs $St = 0,722$ et $St = 0,756$, soit une valeur moyenne égale à 0,739. Comme on peut le voir sur les figures 6.23, 6.27 et 6.31, les oscillations des paramètres de contrôle s'effectuent dans une vallée relativement plate



(a) $r = (0,5; 0,1)^T$



(b) $r = (1,0; 0,2)^T$



(c) $r = (1,5; 0,3)^T$

FIGURE 6.18 – Représentation de la fonction objectif réelle (gauche) et de la fonction objectif modèle (droite) dans trois intervalles différents.

autour du minimum. La valeur du coefficient de traînée moyen est donc très peu affectée par ces oscillations comme le montrent les figures 6.24, 6.28 et 6.32. La valeur obtenue est égale à 0,993. On constate également sur la table 6.3, traduite graphiquement par les figures 6.19, 6.20, 6.21 et 6.22, que la méthode adaptative a échoué pour la condition initiale $A = 1,0$ et $St = 0,2$. Les paramètres de contrôle oscillent dans ce cas autour des valeurs $A = 3,25$ et $St = 0,65$. L'échec de cette condition initiale peut paraître surprenante au vu de l'allure de la fonction objectif (voir figure 6.19 par exemple). Si l'on se réfère à He *et al.* (2000), il semble qu'il existe un autre minimum aux alentours de ces valeurs de paramètres de contrôle (plus exactement, le minimum global trouvé dans leur étude se situe à $A = 3$ et $St = 0,74$). Il est alors possible que les valeurs obtenues en partant de la condition initiale $A = 1$ et $St = 0,2$ soient associées à un minimum local. Ce minimum n'est cependant pas détecté sur la figure 6.19. On verra au chapitre suivant que cette explication n'est sans doute pas la bonne, la raison la plus probable étant alors un éventuel manque de robustesse de la fonction objectif dans la région située¹⁷ autour des valeurs $A = 3,25$ et $St = 0,65$. *A posteriori*, l'ajout de modes de non-équilibre dans cette région augmenterait sans doute la robustesse de la fonction objectif, et permettrait certainement d'entrevoir un succès associé à cette condition initiale.

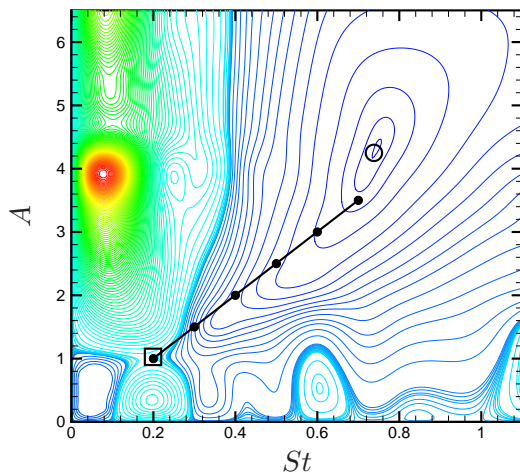


FIGURE 6.19 – Evolution des paramètres de contrôle dans le plan (A, St) . Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.

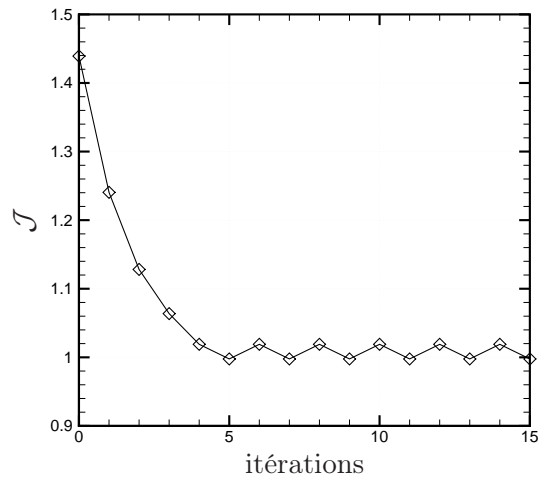


FIGURE 6.20 – Evolution de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.

6.7 Conclusions

La version de base de la méthode adaptative décrite dans ce chapitre n'a pas pu être appliquée avec succès pour notre problème modèle. Dans son étude, Ravindran avait, quant à lui, obtenu de bons résultats pour l'optimisation d'une zone de recirculation en aval d'une marche descendante. De même, une variante de cette méthode a été appliquée avec succès par Afanasiev et Hinze (2001) dans le but de contrôler le sillage d'un cylindre circulaire pour un nombre de Reynolds égal à 100. Dans notre étude, l'algorithme a sans doute échoué du fait de la plus grande complexité de l'écoulement et de la fonction objectif. En effet,

¹⁷. On rappelle que la taille de la région de validité du modèle réduit est fixe dans cette étude, et est définie par $\mathbf{r} = (0,5; 0,1)^T$.

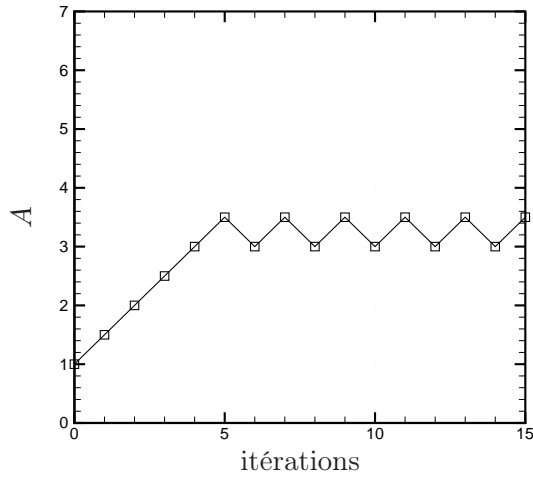


FIGURE 6.21 – Evolution de l'amplitude en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.

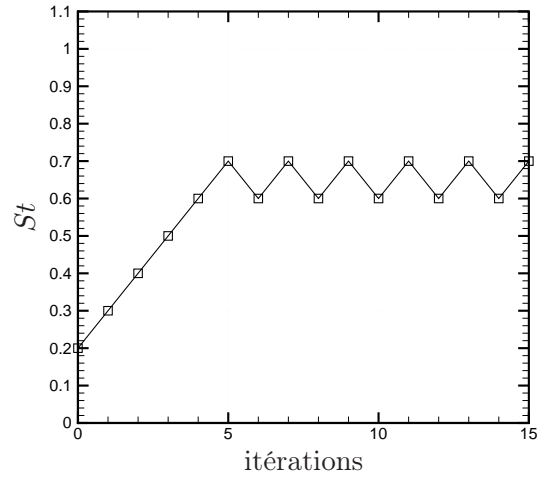


FIGURE 6.22 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.

Itéré	A	St	\mathcal{J}	$\tilde{\mathcal{J}}$
0	1,000	1,000	1,35881	1,35759
1	1,500	0,900	1,30472	1,30398
2	2,000	0,800	1,21171	1,21276
3	2,500	0,700	1,07846	1,09049
4	3,000	0,638	1,01206	1,02437
5	3,500	0,722	1,00052	1,01015
6	4,000	0,730	0,99329	0,99794
7	4,500	0,756	0,99310	0,99773
8	4,000	0,722	0,99314	0,99782
9	4,500	0,756	0,99310	0,99773
10	4,000	0,722	0,99314	0,99782
11	4,500	0,756	0,99310	0,99773
12	4,000	0,722	0,99314	0,99782
13	4,500	0,756	0,99310	0,99773
14	4,000	0,722	0,99314	0,99782
15	4,500	0,756	0,99310	0,99773

TABLE 6.4 – Processus d'optimisation par méthode adaptative contrainte. Evolution en fonction des itérés des valeurs des paramètres de contrôle, des fonctionnelles objectif \mathcal{J} et modèle $\tilde{\mathcal{J}}$. Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour un nombre de Reynolds égal à 200 présente des interactions non-linéaires importantes entre couche limite, décollement et sillage, qui sont fortement liées aux paramètres de contrôle appliqués. Les différentes dynamiques de l'écoulement sont donc très dépendantes des paramètres de contrôle utilisés. De ce fait, le modèle réduit est encore plus fortement lié à la dynamique correspondant aux paramètres de contrôle utilisés pour construire celui-ci. Il est également possible que l'augmentation de la base POD présentée par Afanasiev et Hinze (2001) améliore considérablement la qualité des résultats. Dans cette étude, il a été nécessaire de restreindre le domaine de validité des paramètres de contrôle lors de la résolution du système optimal basé sur le modèle réduit POD. Cette modification a grandement amélioré les résultats. Bien que les paramètres de contrôle obtenus ne soient pas convergents, ils oscillent autour de paramètres qui permettent de réduire significativement la valeur du coefficient de traînée moyen. De plus

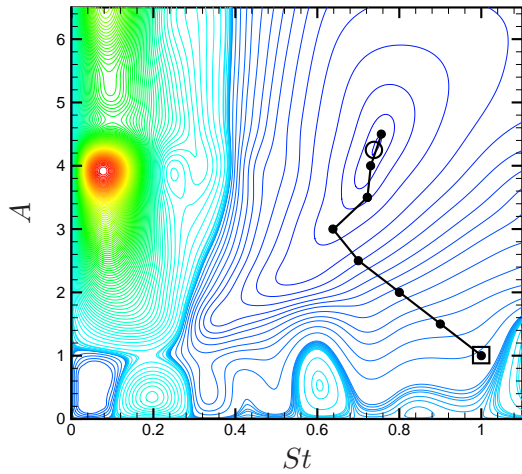


FIGURE 6.23 – Evolution des paramètres de contrôle dans le plan (A, St) . Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

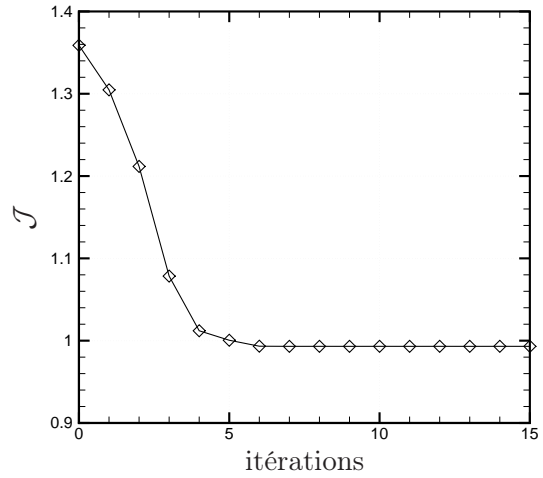


FIGURE 6.24 – Evolution de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

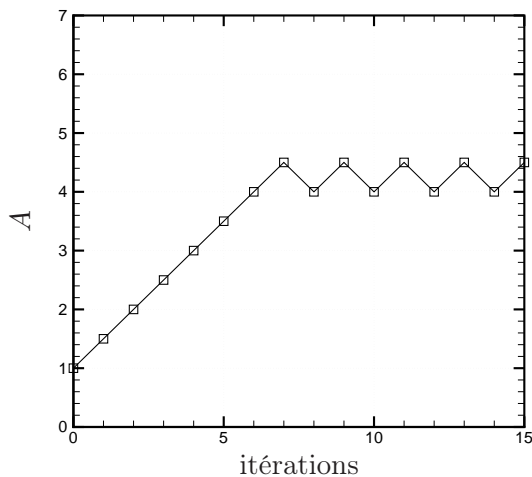


FIGURE 6.25 – Evolution de l'amplitude en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

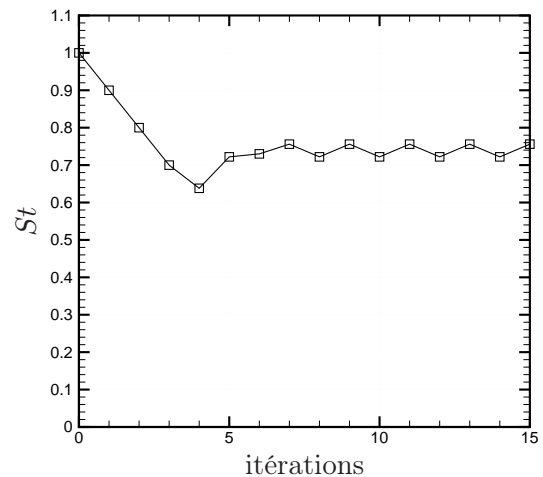


FIGURE 6.26 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

grandes précautions peuvent encore être apportées. Dans l'esprit de l'amélioration de la méthode adaptative présentée ici, en supposant que le modèle réduit est uniquement capable de représenter fidèlement la fonction objectif dans une zone déterminée, des méthodes à régions de confiance peuvent être couplées à l'algorithme de base. L'utilisation de telles méthodes prouve, sous des conditions peu contraignantes, la convergence des paramètres de contrôle obtenus vers les paramètres de contrôle optimaux. La différence avec la méthode présentée dans ce chapitre est que le domaine de validité des paramètres de contrôle n'est pas fixé par l'utilisateur, mais est déterminé par une méthode qui traduit la performance du modèle réduit à reconstruire la fonction objectif, dans un voisinage des paramètres de contrôle utilisés pour construire ce modèle réduit. C'est l'approche que nous utilisons dans le chapitre suivant.

Itéré	A	St	\mathcal{J}	$\tilde{\mathcal{J}}$
0	6,000	0,200	2,28016	2,61982
1	6,000	0,300	1,68637	1,69102
2	5,500	0,400	1,34613	1,41125
3	5,000	0,500	1,15175	1,18524
4	4,500	0,600	1,04948	1,06557
5	4,000	0,700	0,99460	1,01849
6	4,500	0,800	0,99687	1,00269
7	4,000	0,706	0,99391	0,99865
8	4,500	0,756	0,99310	0,99773
9	4,000	0,722	0,99314	0,99782
10	4,500	0,756	0,99310	0,99773
11	4,000	0,722	0,99314	0,99782
12	4,500	0,756	0,99310	0,99773
13	4,000	0,722	0,99314	0,99782
14	4,500	0,756	0,99310	0,99773
15	4,000	0,722	0,99314	0,99782

TABLE 6.5 – *Processus d'optimisation par méthode adaptative contrainte. Evolution en fonction des itérés des valeurs des paramètres de contrôle, des fonctionnelles objectif \mathcal{J} et modèle $\tilde{\mathcal{J}}$. Paramètres de contrôle initiaux: $A = 6,0$ et $St = 0,2$.*

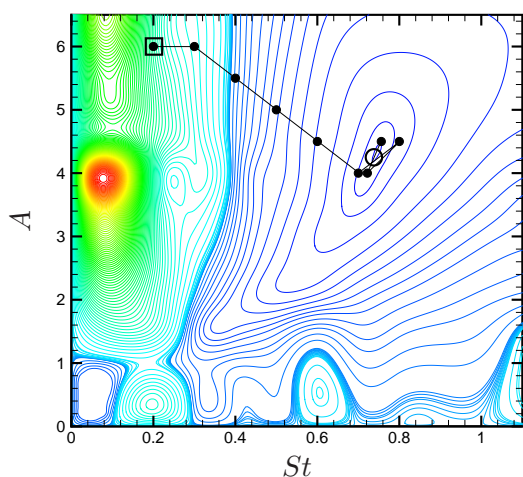


FIGURE 6.27 – *Evolution des paramètres de contrôle dans le plan (A, St) . Conditions initiales: $A = 6,0$ et $St = 0,2$.*

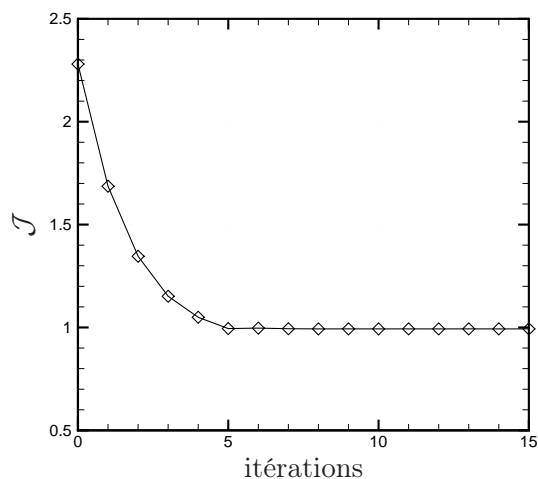


FIGURE 6.28 – *Evolution de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales: $A = 6,0$ et $St = 0,2$.*

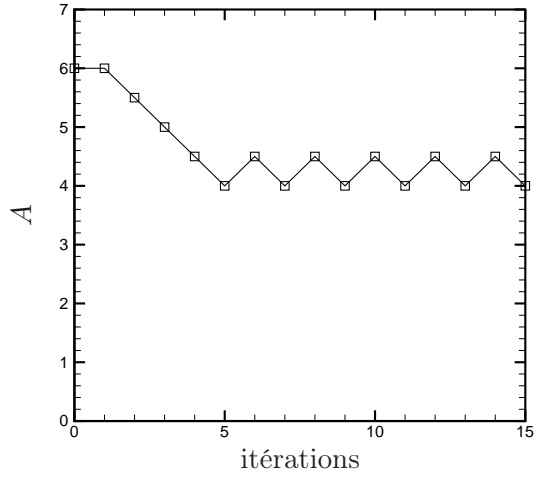


FIGURE 6.29 – Evolution de l'amplitude en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 0,2$.

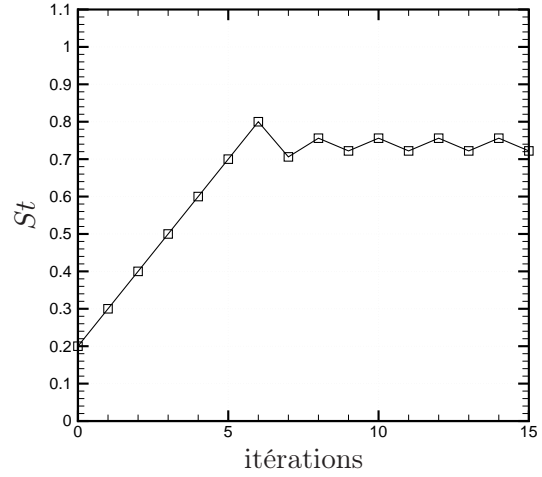


FIGURE 6.30 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 0,2$.

Itéré	A	St	\mathcal{J}	$\tilde{\mathcal{J}}$
0	6,000	1,000	1,04185	1,04644
1	5,500	0,900	1,01923	1,02396
2	5,000	0,800	0,99857	1,00339
3	4,500	0,759	0,99313	0,99786
4	4,000	0,722	0,99314	0,99782
5	4,500	0,756	0,99310	0,99773
6	4,000	0,722	0,99314	0,99782
7	4,500	0,756	0,99310	0,99773
8	4,000	0,722	0,99314	0,99782
9	4,500	0,756	0,99310	0,99773
10	4,000	0,722	0,99314	0,99782
11	4,500	0,756	0,99310	0,99773
12	4,000	0,722	0,99314	0,99782
13	4,500	0,756	0,99310	0,99773
14	4,000	0,722	0,99314	0,99782
15	4,500	0,756	0,99310	0,99773

TABLE 6.6 – Processus d'optimisation par méthode adaptative contrainte. Evolution en fonction des itérés des valeurs des paramètres de contrôle, des fonctionnelles objectif \mathcal{J} et modèle $\tilde{\mathcal{J}}$. Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

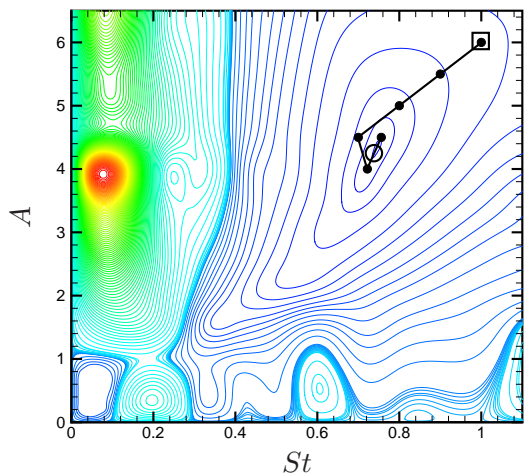


FIGURE 6.31 – Evolution des paramètres de contrôle dans le plan (A, St) . Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

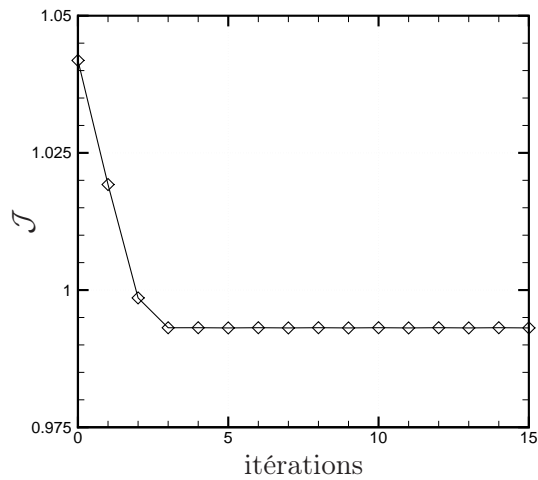


FIGURE 6.32 – Evolution de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

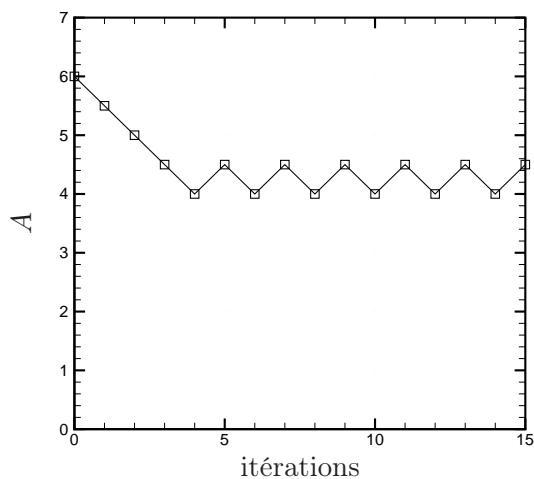


FIGURE 6.33 – Evolution de l'amplitude en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

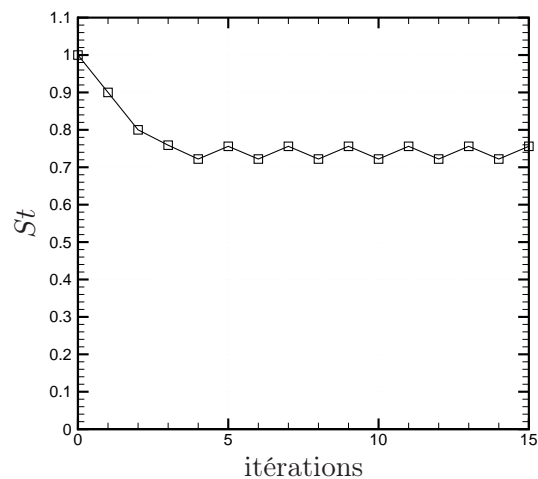


FIGURE 6.34 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

