# Ex 7

a)

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & t^2 \\ 4 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & t^2 \\ 0 & 5 & 4t^2-1 \\ \hline \end{array} \qquad 4\cdot \mathrm{I} - \mathrm{II}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 3\cdot 1 - 2\cdot 4 = -5 \neq 0$$

$\rightsquigarrow \exists$ sol. unique!

$$y = \frac{4t^2-1}{5}$$

$$x = t^2 - 2 \cdot \frac{4t^2-1}{5}$$

$$= -\frac{3}{5}t^2 + \frac{2}{5}.$$

géométriquement, la droite

$$x + 2y = t^2$$

coupe la droite $4x + 3y = 1$ dans le point

$$\left(-\frac{3}{5}t^2 + \frac{2}{5}, \ \frac{4}{5}t^2 - \frac{1}{5}\right).$$

b) $\det \begin{vmatrix} 2t & 9 \\ 8 & t \end{vmatrix} = 2t^2 - 72$.

$\det A \neq 0 \iff t^2 \neq 36 \iff t \notin \{6, -6\}$.

<u>cas 1 :</u> $t = -6$ : $\begin{cases} -12x + 9y = 21 & \mathrm{I} \\ 8x - 6y = 14 & \mathrm{II} \end{cases}$

et $-\frac{2}{3}\cdot \mathrm{I} = \mathrm{II}$ !

$\rightsquigarrow$ il s'agit de fait d'une seule equation

$$8x - 6y = 14$$

$$\iff \cancel{8}x = \frac{14}{8} + \frac{6}{8}y = \frac{7}{4} + \frac{3}{4}y$$

$\rightarrow$ $(x,y) = \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4}y,\ y\right)$, $y \in \mathbb{R}$ est toute une droite de solutions dans $\mathbb{R}^2$.

pareil pour $t = +6$ : $12x + 9y = 21$
et $8x + 6y = 14$

$+\frac{2}{3}\cdot \mathrm{I} = \mathrm{II}$.

Si $|t| \neq 6$, il y a une sol. unique.

$$\begin{array}{cc|c} 2t & 9 & 21 \\ 8 & t & 14 \\ \hline \text{oups !} & & \end{array}$$

pb pour la méthode de Gauss : il faut multiplier par $t$ ce qui oblige à distinguer $t=0$, $t \neq 0$ : multiplier avec $t=0$ correspond à "effacer" une equation !

donc : $t=0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 9 & 21 \\ 8 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{21}{9}, \quad x = \frac{14}{8}.$$

cas $t \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2t & 9 & 21 \\ 0 & 36-t^2 & 84-14t \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ (4\cdot\mathrm{I} - t\cdot\mathrm{II}) \end{array}$$

et $\boxed{y = \dfrac{84-14t}{36-t^2}}$ (rem. que $36-t^2 \neq 0$ car $|t| \neq 6$)

donc $2t\,x = 21 - 9y$

où $x = \dfrac{21}{2t} - 9\,\dfrac{84-14t}{36-t^2} = \dfrac{21(36-t^2) - 9(84-14t)}{2t\,(36-t^2)}$

$\boxed{x = \dfrac{-21t + 126}{2\,(36-t^2)}}$ $(21\cdot 36 = 9\cdot 84\ !)$

c) $\det \begin{vmatrix} 2 & -(t-1) \\ t+2 & 2t+1 \end{vmatrix} = 4t+2 + (t-1)(t+2)$
$= t^2 + 5t = t\cdot(t+5)$

⇝ il ex. une sol. unique si $t \notin \{0, -5\}$.

si $t=0$, $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$ ⇝ pas de solution

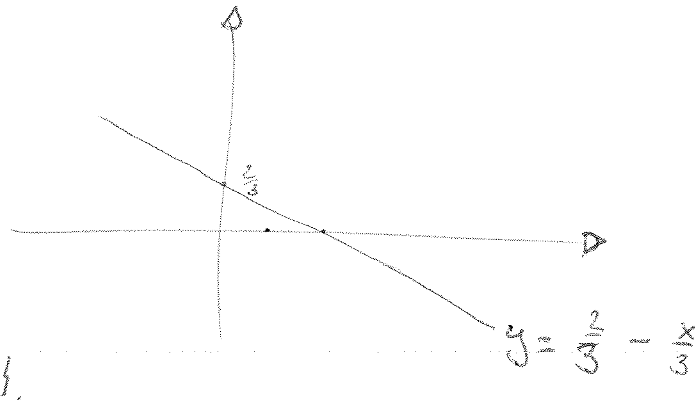
si $t=-5$ : $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & +6 & 4 \\ -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \end{array}$ et $-\frac{3}{2}\cdot\mathrm{I} = \mathrm{II}$

⇝ il y a une infinité de sol.

en effet $(t=-5)$ tout $(x,y)$ t.q.

$2x+6y=4$ résoud le système

$\rightsquigarrow \quad y = \frac{2}{3} - \frac{x}{3}$




Finalement, si $t \notin \{0,-5\}$,

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2$ | $-t+1$ | $4$ | (I) |
| $t+2$ | $(2t+1)$ | $t-1$ | (II) |
| $2$ | $-t+1$ | $4$ | (I) |
| $t$ | $3t$ | $t-5$ | (II−I) |
| $2$ | $-t+1$ | $4$ | |
| $1$ | $3$ | $1-\frac{5}{t}$ | (simplifié par $t\neq 0$) |
| $1$ | $3$ | $1-\frac{5}{t}$ | II |
| $0$ | $-t-5$ | $2+\frac{10}{t}$ | I−2·II |

d'où $\quad y = \dfrac{2+\frac{10}{t}}{-t-5} = -\dfrac{10+2t}{t(t+5)} = -\dfrac{2}{t}$

$$x = 1 - \frac{5}{t} + 3\cdot\frac{10+2t}{t(t+5)} = 1 + \frac{1}{t}.$$

$$\rightsquigarrow \boxed{(x,y) = \left(1+\frac{1}{t}, -\frac{2}{t}\right)}$$

Les systèmes 3×3 avec paramètres sont rares dans les annexes d'anciens examens...

balayage 1ère colonne:

choisir une ligne.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ \boxed{1} & 4 & t & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & t & 0 \\ 0 & 11 & 2t-2 & -3 \\ 0 & 11 & 3t+1 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ 2\cdot \mathrm{III} - \mathrm{II} \\ 3\cdot \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & t & 0 \\ 0 & 11 & 2t-2 & -3 \\ 0 & 0 & -t-3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II} - \mathrm{III} \end{array}$$

1er cas: $t \neq -3$ $\overset{(\mathrm{III})}{\Rightarrow}$ $z = 0$ !

$\overset{(\mathrm{II})}{\Rightarrow}$ $y = -\frac{3}{11}$

$\overset{(\mathrm{I})}{\Rightarrow}$ $x = \frac{12}{11}$

2ième cas: $t = -3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 11 & -8 & -3 \end{array}\right)$$

est sous-déterminé
(2 équations, 3 variables !)

⇝ sol. est une droite.

Déterminons la:

$$y = \frac{-3+8z}{11}$$

$$x = 3z - 4y = 3z + \frac{+12 - 32z}{11}$$

$$= \frac{12}{11} - \frac{z}{11}$$

donc $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/11 \\ -3/11 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1/11 \\ -3/11 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}}$

e)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -3 & t & 29 \\ 10 & 2 & 5 & t \\ 19 & 1 & 16 & 41 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -3 & t & 29 \\ 0 & -32 & 10t-5 & 290-\cancel{2}t \\ 0 & -64 & 19t-112 & 264 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (10\cdot I - II) \\ (19 \cdot I - 7 \cdot III) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -3 & t & 29 \\ 0 & -32 & 10t-5 & 290-t \\ 0 & 0 & t+102 & 316-2t \end{array}\right) \quad 2\cdot II - III$$

cas $t = -102$ ⇝ dernière ligne : $0x + 0y + 0z = 520$

est impossible → pas de sol.

Sinon $(t \neq -102)$, $z = \frac{-2t+316}{t+102}$

⇝ $y \overset{\text{calc.}}{=} \ldots = \frac{19t^2 + 31160 - 2992t}{32(102+t)}$

⇝ $x \overset{\text{calc.}}{=} \ldots = \frac{t^2+168-34t}{32(102+t)}$

désolé, une faute de frappe a dû produire ce résultat peu joli ...