Devoir Surveillé le 8/11/2016
de 15:30 à 16:50

Documents non-autorisés

Par défaut, toutes les fonctions mesurables seront considérées par rapport à la tribu des boréliens.

Exercice 1. Posons

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

1. Donner l'intervalle des x réels pour lesquels l'intégrale donnée est convergente.

   $\square$ La fonction à intégrer étant continue sur $]0,\infty[$ il suffit d'étudier son comportement aux bornes. En zéro elle est équivalente à t^{x-1} donc intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x > 0$. Pour l'étude à l'infini on rappelle que pour $\epsilon \in]0,1[$ et n entier supérieur à $x-1$, on a pour tout $t \geq 1$, $t^{x-1} \leq t^n \leq \frac{n!}{\epsilon^n}e^{\epsilon t}$ et donc la fonction est majorée par $\frac{n!}{\epsilon^n}e^{(\epsilon-1)t}$ qui est intégrable sur $[1,\infty[$. On en déduit que $\Gamma(x)$ est définie par l'intégrale si et seulement si $x > 0$. $\blacksquare$

2. Démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

   Indication: on pourra utiliser l'inégalité $\Gamma(x) \geq \displaystyle\int_2^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

   $\square$ Méthode 1 : la fonction à intégrer étant positive on a $\Gamma(x) \geq \displaystyle\int_2^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Etant donnée une suite $x_n \to \infty$, la suite des fonctions positives $f_n(t) := t^{x_n-1}e^{-t}$ définies sur $[2,\infty[$ tend vers $+\infty$. Le lemme de Fatou assure que $\int_2^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \to +\infty$ et donc $\Gamma(x) \to +\infty$.

   Méthode 2 : De même, on écrit pour tout $x > 1$

$$\Gamma(x) \geq \int_2^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \geq 2^{x-1}\int_2^{+\infty} e^{-t} = 2^{x-1}e^{-2}.$$

   On conclut immédiatement quand $x \to +\infty$. $\blacksquare$

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $s > 0$, on a $\ln\,(1+s) \geq \frac{s}{1+s}$.

   $\square$ (première méthode) Les fonctions de s, $f(s) := \ln\,(1+s)$ et $g(s) := \frac{s}{1+s}$ sont égales pour $s = 0$ et leurs dérivées respectives vérifient pour $s > 0$, $f'(s) = \frac{1}{1+s} \geq \frac{1}{1+s} - \frac{s}{(1+s)^2} = g'(s)$. On en déduit que $f(s) \geq g(s)$ pour tout $s > 0$. $\blacksquare$

   $\square$ (seconde méthode)

$$\ln\,(1+s) = \int_1^{1+s}\frac{dt}{t} \geq (longueur\,de\,l'intervalle).\inf(\frac{1}{t}) = \frac{s}{1+s}.$$

   $\blacksquare$

2. Fixons $x > 0$. Pour tout $h > 0$, on pose $g_x(h) = (1 + xh)^{1/h}$. Calculer $\frac{d}{dh}(\ln(g_x(h)))$ et en déduire que $h \mapsto g_x(h)$ est décroissante quand h parcourt $]0, +\infty[$.

   $\square$ On introduit $G(h) := \ln(g_x(h)) = \frac{1}{h}\ln(1 + xh)$, et donc $G'(h) = \frac{1}{h^2}\left[\frac{hx}{1+hx} - \ln(1 + xh)\right]$. Le signe de $G'(h)$ est donc celui de $H(s) := \frac{s}{1+s} - \ln(1 + s)$ pour $s = xh$. D'après la question précédente, la fonction H est négative, et on déduit qu'il en est de même de G' ce qui assure la décroissance de G. Finalement comme l'exponentielle est une fonction croissante, on conclut que $g_x(h) = e^{G(h)}$ est décroissante pour $h > 0$. $\blacksquare$

3. Posons maintenant $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que

$$\forall n \in I\!N \qquad f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

   $\square$ On remarque que $f_n(x) = g_x(\frac{1}{n})\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$. La décroissance par rapport h de $g_x(h)$ et la croissance de $\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$ par rapport à n, assure que $f_n(x)$ est une suite croissante comme produit de deux suites positives croissantes. $\blacksquare$

4. Calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

   $\square$ Pour $x = 0$ on a $f_n(0) = 1$. Pour $x > 0$ et $n \geq 1/x$, on a $f_n(x) = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}$. En utilisant le développement limité $\ln(1 + t) = t + O(t^2)$ au voisinage de zéro, on obtient pour $x > 0$ fixé, $f_n(x) = e^{x+O(\frac{1}{n})}$. (Autre méthode en utilisant seulement la définition de la dérivée : $n\ln(1 + x/n) = x\left(\frac{\ln(1+x/n)-\ln(1)}{x/n-0}\right) \to x(\ln)'(1) = x$). On conclut que $f_n(x)$ converge vers e^x. ($\blacksquare$

5. En utilisant un théorème du cours (dont on aura rappelé hypothèses et conclusions), étudier

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$$

$\square$ Le théorème de la convergence monotone du à Beppo Levi, assure qu'étant donnée une suite croissante de fonctions mesurables positives F_n sur un espace mesuré (X, μ), la suite $\int_X F_n(x)d\mu(x)$ converge en croissant vers $\int_X \lim(F_n(x))d\mu(x)$. On applique ce résultat à la suite $F_n(x) := f_n(x)e^{-2x}$ qui converge en croissant vers la fonction e^{-x}. On en déduit que la limite cherchée est égale à $\int_{[0,\infty[} e^{-x}dx = 1$ (cette dernière égalité étant obtenue en invoquant encore une fois le théorème de Beppo Levi et l'égalité des intégrales de Riemann et de Lebesgue pour les fonctions continues sur un segment : on écrit $\int_{[0,\infty[} e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]} e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}(1-e^{-n}) = 1$). $\blacksquare$

Exercice 3. Etudier les deux limites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

$$J_n = \int_0^\pi \log\left(e + \frac{x}{n}\right)\sin x\, dx, \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\, dx$$

Indication : pour K_n, on pourra démontrer et utiliser l'inégalité $|\sin(y)| \leq y$ valide pour tout $y > 0$.

$\square$ On considère la suite de fonctions $f_n(x) := \log\left(e + \frac{x}{n}\right)\sin x$ définies sur $[0, \pi]$. Ces fonctions sont continues donc boréliennes. Par continuité du logarithme, $f_n(x)$ converge vers $\sin x$ quand $n \to \infty$, x étant fixé. De plus on a $0 \leq f_n(x) \leq \log(e + \pi) =: g(x)$. La fonction constante g étant intégrable sur $[0, \pi]$, le théorème de la convergence dominée assure que J_n tend vers $\int_0^\pi \sin x\, dx = 2$. On considère la suite de fonctions $f_n(x) := \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}$ définies sur $]0, \infty[$. Ces fonctions étant continues, elles sont boréliennes. Comme $\sin(0) = 0$ et $\sin'(y) = \cos(y) \in [-1, +1]$, on en déduit que $-y \leq sin(y) \leq y$ pour $y \geq 0$. On en déduit que $\mid f_n(x) \mid \leq \frac{1}{1+x^2} =: g(x)$. La fonction continue positive g est intégrable sur $[0, \infty[$ car d'après le théorème de la convergence monotone $\int_{[,\infty[} g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \pi/2$. Par ailleurs comme $\sin(y) = y + O(y^2)$ au voisinage de zéro, la suite $f_n(x)$ converge vers $g(x)$ quand $n \to \infty$, $x > 0$ étant fixé. On conclut par le théorème de la convergence domininée que K_n tend vers $\pi/2$. ■

Exercice 4. Le but de cet exercice est de démontrer le lemme de Fatou et de l'appliquer à un exemple. On rappelle pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles, on définit sa limite inférieure par

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction mesurable $f_n : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty[$. Dans cette première série de questions, on veut démontrer le lemme de Fatou :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx. \tag{1}$$

   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $g_k(x) = \inf\limits_{n\geq k} f_n(x)$. Justifier que g_k est mesurable et démontrer que pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ on a

$$j \geq k \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^d} \inf_{n\geq k} f_n(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_j(x)\,dx$$

   □ On rappelle un critère pratique de mesurabilité : une fonction $u(x)$ est mesurable si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x;\, u(x) < a\}$ est mesurable. Etant donné $a \in \mathbb{R}$, on a $\{x \in \mathbb{R}^d, g_k(x) < a\} = \cup_{n\geq k}\{x;\, f_n(x) < a\}$. Une réunion dénombrable de parties mesurables étant mesurable, on conclut que g_k est mesurable. ■ □ Par ailleurs pour tout $j \geq k$, on a $g_k \leq g_j \leq f_j$, et donc $\int g_k \leq \int g_j \leq \int f_j$. ■

   (b) En déduire que l'on aussi

$$\int_{\mathbb{R}^d} \inf_{n\geq k} f_n(x)\,dx \leq \inf_{j\geq k} \int_{\mathbb{R}^d} f_j(x)\,dx.$$

   □ Puisque l'inégalité précédente $\int g_k \leq \int f_j$, est valable pour tout $j \geq k$, on en déduit que $\int g_k \leq \inf_{j\geq k} \int f_j$. ■

   (c) Expliquer comment démontrer le lemme de Fatou.
   □ La suite g_k est une suite croissante de fonctions mesurables positives, donc le théorème de Beppo Levi assure que $\int \lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \int g_k$. Par définition $\int \lim_{k\to\infty} g_k = \int \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. D'autre part on vient de montrer que $\int g_k \leq \inf_{j\geq k} \int f_j$ et donc on prenant la limite des deux membres de cette inégalité, on obtient $\lim_{k\to\infty} \int g_k \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} \int f_j$. On conclut que $\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$. ■

2. Soit maintenant

$$f_n(x) = \exp(n\cos(x/n) - x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Prouver que chaque f_n est mesurable positive sur $\mathbb{R}$.
   □ f_n est la composée de fonctions continues par l'exponentielle qui est continue positive, donc f_n est une fonction continue positive, et donc mesurable positive. ■

   (b) Étudier la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   □ x étant fixé, un développement limité du cosinus montre que $f_n(x) = e^{n+O(\frac{x}{n})}.e^{-x^2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. ■

   (c) En utilisant la première partie de l'exercice, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = +\infty.$$

   □ La question précédente assure que $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Le lemme de Fatou implique alors que $\infty = \int \infty \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx$, ce qui donne le résultat. ■

Exercice 5.

1. Pour tout $t \in I\!R$, expliquer pourquoi $\Omega_t = \{(X,Y) \in I\!R^2, \quad X+Y > t\}$ est un ouvert de $I\!R^2$.

   $\square$ La fonction $F : (X,Y) \mapsto X+Y$ est continue, donc Ω_t est un ouvert en tant qu'image réciproque par F de l'ouvert $]t,\infty[$. $\blacksquare$

   On admettra le résultat suivant vu en COURS/TD : il existe quatre suite réelles $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n) telles que $a_n < b_n$ et $c_n < d_n$ pour tout $n \in I\!N$ et

   $$\Omega_t := \bigcup_{n \in I\!N}]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[.$$

2. Soit $f : I\!R \to I\!R$ et $g : I\!R \to I\!R$ deux fonctions mesurables. Justifier l'equivalence suivante pour tout $x \in I\!R$:

   $$f(x) + g(x) > t \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists n \in I\!N \quad \text{“}a_n < f(x) < b_n \quad \text{et} \quad c_n < g(x) < d_n\text{”}.$$

   $\square$ $f(x)+g(x) > t$ si et seulement si $(f(x), g(x)) \in \Omega_t = \bigcup_{n \in I\!N}]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$, donc si et seulement si il existe un entier n tel que $f(x) \in]a_n, b_n[$ et $g(x) \in]c_n, d_n[$. $\blacksquare$

3. Démontrer que la fonction $f+g$ est mesurable.

   $\square$ Par la question précédente on voit que $\{x;\ (f+g)(x) > t\} = \bigcup_{n \in I\!N} f^{-1}(]a_n, b_n[) \cap g^{-1}(]c_n, d_n[)$. Comme f et g sont mesurables, $f^{-1}(]a_n, b_n[)$ et $g^{-1}(]c_n, d_n[)$ sont mesurables, et puisque les intersections dénombrables et les unions dénombrables de parties mesurables sont mesurables, on déduit que pour tout réèl t, la partie $\{x;\ (f+g)(x) > t\}$ est mesurable. Par le critère classique de la mesurabilité des fonctions, on conclut que $f+g$ est mesurable. $\blacksquare$