Devoir Surveillé le 8/11/2016
de 15:30 à 16:50

Documents non-autorisés

Par défaut, toutes les fonctions mesurables seront considérées par rapport à la tribu des boréliens.

Exercice 1. Posons

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

1. Donner l'intervalle des x réels pour lesquels l'intégrale donnée est convergente.
2. Démontrer que
$$\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$
Indication: on pourra utiliser l'inégalité $\Gamma(x) \geq \displaystyle\int_2^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $s > 0$, on a $\ln\,(1+s) \geq \frac{s}{1+s}$.
2. Fixons $x > 0$. Pour tout $h > 0$, on pose $g_x(h) = (1+xh)^{1/h}$. Calculer $\frac{d}{dh}\,(\ln\,(g_x(h)))$ et en déduire que $h \mapsto g_x(h)$ est décroissante quand h parcourt $]0, +\infty[$.
3. Posons maintenant $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que
$$\forall n \in I\!N \qquad f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$
4. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
5. En utilisant un théorème du cours (dont on aura rappelé hypothèses et conclusions), étudier
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$$

Exercice 3. Etudier les deux limites suivantes quand $n \to \infty$:

$$J_n = \int_0^{\pi} \log\left(e + \frac{x}{n}\right) \sin x\, dx, \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)}\, dx$$

Indication : pour K_n, on pourra démontrer et utiliser l'inégalité $|\sin(y)| \leq y$ valide pour tout $y > 0$.

Exercice 4. Le but de cet exercice est de démontrer le lemme de Fatou et de l'appliquer à un exemple. On rappelle pour toute suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ à valeurs réelles, on définit sa limite inférieure par

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k.$$

1. Pour tout $n \in I\!N$, on considère une fonction mesurable $f_n : I\!R^d \to [0,+\infty[$. Dans cette première série de questions, on veut démontrer le lemme de Fatou :

$$\int_{I\!R^d} \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{I\!R^d} f_n(x)\,dx. \tag{1}$$

   (a) Pour tout $k \in I\!N$, on note $g_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x)$. Justifier que g_k est mesurable et démontrer que pour tout $(j,k) \in I\!N^2$ on a

$$j \geq k \quad \Rightarrow \quad \int_{I\!R^d} \inf_{n\geq k} f_n(x)\,dx \leq \int_{I\!R^d} f_j(x)\,dx$$

   (b) En déduire que l'on aussi

$$\int_{I\!R^d} \inf_{n\geq k} f_n(x)\,dx \leq \inf_{j\geq k} \int_{I\!R^d} f_j(x)\,dx.$$

   (c) Expliquer comment démontrer le lemme de Fatou.

2. Soit maintenant

$$f_n(x) = \exp(n\cos(x/n) - x^2), \quad x \in I\!R.$$

   (a) Prouver que chaque f_n est mesurable positive sur $I\!R$.

   (b) Étudier la limite $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in I\!R$.

   (c) En utilisant la première partie de l'exercice, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{I\!R} f_n(x)\,dx = +\infty.$$

Exercice 5.

1. Pour tout $t \in I\!R$, expliquer pourquoi $\Omega_t = \{(X,Y) \in I\!R^2, \quad X+Y > t\}$ est un ouvert de $I\!R^2$.

   On admettra le résultat suivant vu en COURS/TD : il existe quatre suites réelles (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) telles que $a_n < b_n$ et $c_n < d_n$ pour tout $n \in I\!N$ et

$$\Omega_t := \bigcup_{n\in I\!N}]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[.$$

2. Soit $f : I\!R \to I\!R$ et $g : I\!R \to I\!R$ deux fonctions mesurables. Justifier l'equivalence suivante pour tout $x \in I\!R$:

$$f(x) + g(x) > t \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists n \in I\!N \quad \text{“}a_n < f(x) < b_n \quad \text{et} \quad c_n < g(x) < d_n\text{”}.$$

3. Démontrer que la fonction $f + g$ est mesurable.