université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017** **S1 AUTOMNE** Code UE : 4TMQ502U Epreuve : Intégration Date : 13/12/2016 Heure : 9h Durée : 3h Aucun document autorisé Epreuve de M Rafik Imekraz	**COLLEGE SCIENCES ET TECHNOLOGIES**

Exercice 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et l'on considère une fonction

$$\begin{array}{rcl} f : I \times \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$$

A) Rappeler les hypothèses et la conclusion sur f dans le théorème de dérivabilité sous le signe d'intégration $\int$.

Exercice 2

B) Pour tout $x \geq 0$, démontrer que l'on a $|\sin(x)| \leq x$.

C) Pour tout $t \geq \frac{1}{2}$, on note $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \exp(-xt)dx$. Démontrer rigoureusement que la fonction F est dérivable sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

D) Prouver que l'on a

$$\forall t \geq \frac{1}{2} \qquad F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}.$$

E) En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$\forall t \geq \frac{1}{2} \quad F(t) = C - \arctan(t).$$

F) Prouver que $C = \frac{\pi}{2}$.

G) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \exp(-x)dx$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, on pose $f_n(x) = \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^n \exp(-x^2)$.

On note E l'ensemble des $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tels que $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 1$.

H) Montrer que E est un ensemble dénombrable.

I) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (au sens de la mesure de Lebesgue).

J) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$.

Exercice 4

Pour tout $R > 1$ on note

$$B(R) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 < x^2 + y^2 < R^2\} \quad \text{et} \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 < x^2 + y^2\}$$

Fixons en outre $\alpha > 0$.

K) Représenter graphiquement $B(2)$ et calculer $\displaystyle\int_{B(R)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

L) Trouver un lien, avec un argument rigoureux, entre $\displaystyle\int_{B(R)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

M) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha > 0$ pour que la fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ soit intégrable sur Ω.

N) Trouver une constante $C > 1$ qui vérifie la propriété suivante

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{1}{C}(|x|+|y|) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq C(|x|+|y|).$$

O) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\beta > 0$ pour que la fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{(|x|+|y|)^\beta}$ soit intégrable sur Ω.

Exercice 5

Etudier rigoureusement les limites des termes suivants quand $n \to +\infty$

P)

$$\frac{1}{\pi^n}\int_0^\pi \frac{x^n}{\sqrt{\sin(x)}}dx$$

Q)

$$\int_0^{+\infty} e^{nx-x^2}dx$$

R)

$$\int_0^{10} (1-\sin(x)^2)^n dx.$$

S)

$$\int_0^1 n\ln(1+x/n)dx$$

Correction

On attire l'attention sur le fait suivant : le sujet est long est n'a pas vocation à être fini intégralement. Plusieurs thèmes sont étudiés pour tester les connaissances.

Exercice 1

Voir cours

Exercice 2

B) On écrit $|\sin(x)| = \left|\int_0^x \cos(t)dt\right| \leq \int_0^x |\cos(t)|dt \leq \int_0^x dt = x$.

C) On veut appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe $\int$. Validons donc ses hypothèses.

HYP1 : pour tout t, la fonction $f(x,t) = \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}$ est mesurable par rapport à x.

HYP2 : pour presque tout x, la fonction $f(x,t) = \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}$ est dérivable par rapport à t.

HYP3 : il existe $t_0 \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, par exemple $t_0 = \frac{1}{2}$, tel que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}e^{-xt_0}dx < +\infty$. En effet, à l'aide de la question B), on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}e^{-xt_0}dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt_0}dx = \frac{1}{t_0} < +\infty.$$

HYP4 : on cherche une domination de $\frac{\partial f}{\partial t} = -\sin(x)e^{-xt}$:

$$|-\sin(x)e^{-xt}| \leq e^{-xt} \leq e^{-x/2} \in L^1([0, +\infty[).$$

Le théorème de dérivabilité sous le signe $\int$ assure que F est dérivable et que $F'(t) = \int_0^{+\infty} -\sin(x)e^{-xt}dx$.

D) D'après la question précédente, on doit intégrer $\sin(x)e^{-xt}$ par rapport à x. Une idée classique est de faire une double intégration par parties. Voici un autre argument plus simple : $\sin(x)e^{-xt}$ est la partie imaginaire de e^{ix-xt}. De plus, on a $|e^{ix-xt}| = e^{-xt}$ qui est bien intégrable en x. Donc on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-xt}dx = \mathrm{Im}\int_0^{+\infty} e^{ix-xt}dx$$

Une primitive de e^{ix-xt} est $\frac{e^{ix-xt}}{i-t}$. On a de plus :

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{e^{ix-xt}}{i-t}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} = 0$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-xt}dx = \mathrm{Im}\int_0^{+\infty} e^{ix-xt}dx = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{ix-xt}}{i-t}\right]_{x=0}^{+\infty} = \mathrm{Im}\frac{-1}{i-t}$$

On multiplie par le nombre complexe conjugué :

$$\mathrm{Im}\frac{-1}{i-t} = \mathrm{Im}\frac{-(-i-t)}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

Finalement, la question précédente donne $F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$.

E) Comme la dérivée de arctan est $\frac{1}{1+t^2}$, on comprend qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \geq \frac{1}{2} \qquad F(t) = C - \arctan(t)$$

F) Pour trouver $C = \frac{\pi}{2}$, on se propose d'examiner la limite en $t = +\infty$. En effet, la question B) donne

$$|F(t)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{|x|} e^{-xt} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dx = \frac{1}{t}$$

Donc $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$. Par ailleurs, la question précédente donne

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = C - \lim_{t \to +\infty} \arctan(t) = C - \frac{\pi}{2}$$

Donc $C = \frac{\pi}{2}$.

G) Pour $t = 1$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

H) Par définition $E = \{x \in \mathbb{R}, \cos(1/x) = \pm 1\}$ et donc

$$x \in E \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{x} = k\pi$$

On notera que k est forcément non nul, donc

$$x \in E \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}^\star \quad x = \frac{1}{k\pi}$$

Ainsi $E = \{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^\star\}$ est bien dénombrable.

I) Pour tout $x \notin E$, on a $|\cos(1/x)| \neq 1$. Mais comme la fonction cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, on comprend que

$$x \notin E \quad \Rightarrow \quad |\cos(1/x)| < 1$$

Comme $f_n(x) = \cos(1/x)^n e^{-x^2}$, il vient

$$x \notin E \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0.$$

Enfin, E est dénombrable et donc de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue. Cela prouve, que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

J) On veut appliquer le théorème de la CV dominée : les fonctions f_n sont mesurables, convergent vers 0 presque partout, et l'on a $|f_n(x)| \leq e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Le théorème de la convergence dominée donne

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$$

Exercice 4

K) $B(2)$ est la couronne comprise entre les cercles, centrés en $(0,0)$, et de rayons 1 et 2. Un changement de variable polaire $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ permet de paramétrer $B(R)$ par les conditions

$$\theta \in [-\pi, \pi[\qquad 1 < r < R$$

Cela donne

$$\int_{B(R)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} \int_{r=1}^{R} \frac{rdrd\theta}{r^{2\alpha}} = \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} \int_{r=1}^{R} \frac{drd\theta}{r^{2\alpha-1}}$$

Pour intégrer $\frac{1}{r^{2\alpha-1}}$, on doit distinguer si l'on a $\frac{1}{r}$ ou non. En effet :

- $\alpha = 1$, alors $2\alpha - 1 = 1$ et donc

$$\int_{B(R)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)} = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=1}^{R} \frac{dr}{r} = \int_{-\pi}^{+\pi} \ln(R) = 2\pi \ln(R).$$

- $\alpha \neq 1$ alors $2\alpha - 1 \neq 1$ et donc on intègre $\frac{1}{r^{2\alpha-1}} = r^{1-2\alpha}$ en

$$\int_{B(R)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} \int_{r=1}^{R} \frac{drd\theta}{r^{2\alpha-1}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right]_{r=1}^{R} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{2-2\alpha}-1}{2-2\alpha} d\theta = \frac{\pi}{1-\alpha}(R^{2-2\alpha}-1).$$

L) On constate que $\Omega = \bigcup_{R>1} B(R)$. On veut donc naturellement prouver que l'on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{B(R)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \int_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}.$$

Soit (R_n) une suite croissante qui tend vers $+\infty$, on doit montrer que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(R_n)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \int_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}.$$

Posons $f_n(x,y) = \frac{\mathbf{1}_{B(R_n)}(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$. Les fonctions f_n sont mesurables, positives, et vérifient $f_n \leq f_{n+1}$ car $B(R_n) \subset B(R_{n+1})$. Le théorème de la convergence monotone donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(R_n)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{n\to+\infty} f_n(x,y)dxdy$$

Mais comme $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(R_n)$, il est clair que $f_n(x,y) \to \frac{\mathbf{1}_{\Omega}(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$. Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B(R_n)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \int_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

M) La fonction positive $\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ est intégrable sur Ω si et seulement si son intégrale sur Ω est finie. D'après la question précédente, cela équivaut à

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{B(R)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} < +\infty$$

On invoque les calculs faits à la question précédente :

- si $\alpha = 1$, alors

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{B(R)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \lim_{R\to+\infty} 2\pi \ln(R) = +\infty$$

On n'a pas intégrabilité en $\alpha = 1$.

- si $\alpha \neq 1$, alors

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{B(R)} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{1-\alpha}(R^{2-2\alpha} - 1)$$

comme l'exposant de R est $2 - 2\alpha$, on doit distinguer si ce dernier est < 1 ou > 1.

- si $\alpha < 1$ alors

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{1-\alpha}(R^{2-2\alpha} - 1) = +\infty$$

- si $\alpha > 1$ alors

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{1-\alpha}(R^{2-2\alpha} - 1) = \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{\alpha-1}(1 - R^{2-2\alpha}) = \frac{\pi}{\alpha-1}.$$

En conclusion, on a intégrabilité si et seulement si $\alpha > 1$.

N) Il s'agit de l'équivalence des normes en dimension finie. Mais on peut trouver des constantes explicites. Commençons par l'inégalité :

$$\frac{1}{C}(|x| + |y|) \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

De façon immédiate, on a $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Ce qui donne

$$|x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$$

Tout nombre $C \geq 2$ va vérifier $|x| + |y| \leq C\sqrt{x^2+y^2}$ et donc l'inégalité voulue $\frac{1}{C}(|x| + |y|) \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Cherchons C pour satisfaire la seconde inégalité

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq C(|x| + |y|)$$

Par passage au carré, cela signifie que l'on doit majorer x^2+y^2 par $C^2(|x|^2+|y|^2+2|x||y|)$. Il est clair que tout nombre $C \geq 1$ convient car $x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2$.

En combinant les deux analyses, on voit que $C = 2$ convient.

O) D'après la question précédente, on a

$$\frac{1}{C^\beta}(|x| + |y|)^\beta \leq \sqrt{x^2+y^2}^\beta \leq C^\beta(|x| + |y|)^\beta$$

par passage à l'inverse on a

$$\frac{1}{C^\beta}\frac{1}{(|x| + |y|)^\beta} \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^{\beta/2}} \leq C^\beta \frac{1}{(|x| + |y|)^\beta}$$

En intégrant ces fonctions positives sur Ω, on a

$$\frac{1}{C^\beta}\int_\Omega \frac{dxdy}{(|x|+|y|)^\beta} \leq \int_\Omega \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\beta/2}} \leq C^\beta \int_\Omega \frac{dxdy}{(|x|+|y|)^\beta}$$

On comprend donc que l'intégrale $\int_\Omega \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\beta/2}}$ est finie si et seulement si $\int_\Omega \frac{dxdy}{(|x|+|y|)^\beta}$ est finie. La question M) donne la condition $\frac{\beta}{2} > 1$, c'est-à-dire $\beta > 2$.

P) La fonction $\sin(x)$ s'annule en $x = 0$ et $x = \pi$. Ce sont donc deux points qui méritent une attention particulière :

$$\sin(x) \sim x \qquad x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

L'équivalent en $x = 0$ est positif et intégrable (critère de Riemann en 0 avec exposant $\frac{1}{2}$). Donc il y a intégrabilité en 0.

$$\sin(x) = \sin(\pi - x) \sim \pi - x \qquad x = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi - x}}$$

Le même argument montre l'intégrabilité en π.

Maintenant on écrit :

$$\forall x \in]0,\pi[\qquad \frac{x^n}{\pi^n\sqrt{\sin(x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} \in L^1(]0,\pi[)$$

On a ainsi une domination intégrable des fonctions $\frac{x^n}{\pi^n\sqrt{\sin(x)}}$. De plus, pour tout $x \in]0,\pi[$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{\pi^n\sqrt{\sin(x)}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{\pi}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} = 0$$

Le théorème de la convergence dominée montre donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi^n}\int_0^\pi \frac{x^n}{\sqrt{\sin(x)}}dx = 0$$

Q) Posons $f_n(x) = e^{nx-x^2}$. La fonction f_n est positive mesurable et l'on a $f_{n+1}(x) = e^x e^{nx-x^2} \geq f_n(x)$ car $e^x \geq e^0 = 1$. Le théorème de la convergence monotone donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{nx-x^2}dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} e^{nx-x^2}dx = \int_0^{+\infty} +\infty = +\infty$$

R) On a $0 \leq (1-\sin^2(x))^n \leq 1$ et 1 est intégrable sur le segment $[0, 10]$. On a une domination intégrable. Il nous reste à appliquer le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{10}(1-\sin(x)^2)^n dx = \int_0^{10}\lim_{n\to+\infty}(1-\sin(x)^2)^n dx$$

Si x évite l'ensemble dénombrable $\pi\mathbb{Z}$ alors on a $\sin(x)^2 > 0$. Comme un ensemble dénombrable est de mesure nulle, on comprend que presque partout, on a $(1-\sin(x)^2) < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\sin(x)^2)^n = 0$. Finalement, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{10}(1-\sin(x)^2)^n dx = 0$$

S) On utilise l'inégalité classique $\ln(1+x) \leq x$ pour avoir

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leq n\ln(1+x/n) \leq x$$

La fonction x domine toutes les fonctions $n\ln(1+x/n)$. Comme on travaille sur le segment $[0,1]$, la fonction x est intégrable et l'on peut appliquer le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n\ln(1+x/n)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} n\ln(1+x/n)dx = \int_0^1 xdx = [x^2/2]_0^1 = \frac{1}{2}.$$