Pensez bien justifier vos réponses.
Toute affirmation non justifiée sera considéré fausse.

Question 1 *(Barème indicatif: 1+1.5+1 = 3.5 points)* Soit $X = \mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite par la norme Euclidienne $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Soit $N(\cdot)$ une autre norme sur $\mathbb{R}^2$. Pour chacune des parties suivantes expliquer avec preuve détaillée, si elles sont ouvertes ou non (on pourra faire une esquisse rapide dans le plan $\mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) : \quad \|(x,y)\|_2 < 42\Big\} \\ B &= \{(x,y) : \quad N((x,y)) < 42\Big\} \\ C &= \Big\{(x,y) : \quad \exists p \in \mathbb{N} : y = px\Big\}. \end{aligned}$$

Réponse: A, B sont ouverts (et non fermés). En effet, $(x,y) \in A$ ssi $\|x,y)\| < 42$. Il existe donc un $r > 0$, par exemple $r = 42 - \|(x,y\|$ tel que $\|(\widetilde{x},\widetilde{y}) - (x,y)\| < r$ implique $\|(\widetilde{x},\widetilde{y})\| \leq -\|(\widetilde{x},\widetilde{y})(x,y)\| + 42 < r$. Pour B on utilise l'équivalence de normes en dimension finie pour obtenir que la N-boule est ouverte par rapport a la norme euclidienne.
Concernant C il est ni ouvert ni fermé : Observons que $(1/n,1) \in C$ et que $(1/n,1) \to (0,1) \notin C$. Ainsi C n'est pas fermé. Dautre part, $(1,0) \in C$ mais $B((1,0),r) \not\subset C$ pour un rayon $r > 0$ quelconque, ce qui montre que C n'est pas ouvert.

Question 2 *(Barème indicatif: 1+1=2 points)* Soit

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad y^2 < x^2\big\}.$$

(a) Faire un dessin de D dans le plan $\mathbb{R}^2$.
(b) Justifier rigoureusement si, oui ou non, D est une partie connexe dans $\mathbb{R}^2$ (muni de la topologie habituelle).

Réponse: D est un "double cone" ouvert (comme image reciproque $f^{-1}(0,\infty)$ pour $f(x,y) = x^2 - y^2$). D ne contient pas l'origine (en effet, $0 \not< 0$). Les parties $D_+ = D \cap \{x > 0\}$ et $D_- = D \cap \{x < 0\}$ sont donc deux ouverts (car intersection d'ouverts), leur union est D. Ainsi D n'est pas connexe.

Question 3 *(Barème indicatif: 1 + 2 = 3 points)* Rappelons que $\mathscr{B}$ est une base d'une topologie sur X si

(i) $\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B = X$
(ii) Pour tout $A, B \in \mathscr{B}$ il existe une partie $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ tel que $A \cap B = \bigcup_{C\in\mathscr{C}} C$.

Sur $X = \mathbb{R}$, soit $\mathscr{B} = \{\pi\} \cup \big\{\{\pi, x\} : x \neq \pi\big\}$.

(a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base d'une topologie sur $\mathbb{R}$, appelée la topologie VIP (un sigle pour "Very Important π").
(b) Soit

$$E = [-2,2] \quad \text{et} \quad F = [-4,4]$$

Les parties E et F, sont-elles ouvertes dans la topologie VIP de $\mathbb{R}$? Détailler vos réponses.

Réponse: pour $x \neq \pi$, $x \in \{x,\pi\} \in \mathscr{B}$ et donc $x \in \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$, et visiblement, $\pi \in \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$. La première condition est donc satisfaite. Soient $A, B \in \mathscr{B}$. Si au moins un des deux est le singleton $\{\pi\}$, $A \cap B = \{\pi\} \in \mathscr{B}$. Si ni A ni B sont singletons, on a $A \cap B \in \{A, \{\pi\}\} \subset \mathscr{B}$. La deuxième condition est donc également satisfaite.
Un ouvert est une union d'éléments de la base, ainsi tout ouvert contient π. Ceci n'est pas le cas pour E. En revanche, $F = \bigcup_{x\in F\setminus\{\pi\}} \{x, pi\}$ est bien un ouvert.

Question 4 *(Barème indicatif: 1+0.5+1+0.5=3 points)* Soit $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tel que } f \text{ bornée }\}$ et $Y = C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tel que } f \text{ continue}\}$. Il est admis que X, Y sont des espaces vectoriels pour l'addition usuelle de fonctions et leur multiples scalaires.

(a) Montrer que $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \quad x \in [0,1]\}$ est une norme sur X.
(b) Montrer que $Y \subset X$. Dorénavant, Y sera muni de la topologie induite par X.
(c) Montrer que aucun voisinage de la fonction $f = 0$ est inclus dans Y.
(d) Est-ce que $A = \{f \in Y : \|f\| < 1\}$ est un ouvert de X? Preuve ou contre-exemple détaillé.

Réponse: la question (a) est du cours. Toute fonction continue sur un compact est bornée, donc $Y \subset X$, ce qui donne (b). Soit $r > 0$ la fonction qui vaut 0 sur les rationnels mais $r/2$ sur les irrationnels est dans la boule autour de $f = 0$ de rayon r sans être continue ... ce qui donne (c). Par consequent, A ne peut être ouvert! Car aucune boule autour de $f \in A$ n'est contenue dans Y selon (c).

Question 5 *(Barème indicatif: 2 points)* Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie quelconque. On pose $\text{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : \ a \in A\}$ et $A_\varepsilon = \{x \in X : \text{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. Montrer que

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

Réponse: Observons que $x \in A_\varepsilon$ ssi $\inf\{d(x,a) : \ a \in A\} < \varepsilon$ ssi il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$ ssi il existe $a \in A$ tel que $x \in B(a, \varepsilon)$ ssi $x \in \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

Question 6 *(Barème indicatif: 1.5 + 2.5 = 4 points)*
(a) Soit (X, d) un espace métrique compact et (x_n) une suite de X qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence. Est-ce que (x_n) converge? Preuve ou contre-exemple.
(b) Soit f une application de X dans Y, espaces métriques, et $G = \{(x, f(x)) : \ x \in X\} \subset X \times Y$ le graphe de f. Montrer que G est fermé dans $X \times Y$ si f est continue. Montrer que la réciproque est vraie lorsque Y est compact.

Réponse: soit $(x_{\sigma(n)})$ une sous-suite extraite qui converge vers la seule valeur d'adhérence ℓ. Supposons par l'absurde que $x_n \not\to \ell$: l'assertion $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, \ell) < \varepsilon$ est fausse, c'est à dire: $\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : d(x_n, \ell) \geq \varepsilon$. Ceci permet de trouver une infinité de valeurs x_n avec $d(x_n, \ell) \geq \varepsilon$. Or X est compact et métrique, donc sequentiellement compact, nous pouvons extraire une sous-suite convergente dont les membres $d(x_n, \ell) \geq \varepsilon$. Leur limite est donc différente de ℓ ce qui contredit l'hypothèse d'une SEULE valeur d'adhérence.

Soit f continue, et (x_n, y_n) une suite convergente de G avec limite (x, y). Or $x_n \to x$ et f continue, $f(x_n) \to f(x)$. Par unicité de la limite, $y = f(x)$, ce qui prouve que G est fermé.
Soit x un point quelconque de X et (x_n) une suite convergente vers x. On note $y_n = f(x_n)$. Par compacité séquentielle de Y supposer que $y_{\sigma(n)} \to y$. Ainsi, $(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) \to (x, y)$. Or G est fermé et $(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) \in G$ pour tout n, on déduit que $(x, y) \in G$ ce qui montre que $y = f(x)$. Ainsi, peu importe le choix de σ, la sous-suite extraite $(y_{\sigma(n)})$ converge toujours vers $f(x)$. La suite (y_n) n'a donc qu'une seule valeur d'adhérence (qui est $f(x)$), et converge vers cette valeur par (a).

Question 7 *(Barème indicatif: 1.5 + 2 = 3.5 points)* Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie discrète et $Y = \mathbb{R}$ muni de la topologie habituelle.
(a) Parmi les ensembles

$$G = (-1, 1) \times (-1, 1) \qquad H = [-1, 1] \times (-1, 1) \qquad \text{et} \qquad J = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

identifier les parties ouvertes pour la topologie produit sur $X \times Y$. Preuve ou contre-exemple détaillé pour chaque ensemble.
(b) Caractériser les parties compactes K de $X \times Y$ qui sont de la forme $K = K_1 \times K_2$.

Réponse: Observons que $(-1, 1)$ et $[-1, 1]$ sont ouverts dans X car toute partie est ouverte dans la topologie discrète. En revanche, pour la topologie habituelle, $[-1, 1]$ ne l'est pas. Par conséquent, G et H sont produits de deux ouverts et donc ouvert dans la topologie produit. Par contre, J n'est pas ouvert: Les ouverts de $X \times Y$ sont union de parties de la forme $O_1 \times O_2$ où O_1 est ouvert dans X et O_2 ouvert dans Y. Raisonnons par l'absurde: si J était ouvert on aurait donc un produit d'ouverts $O_1 \times O_2$ avec $1 \in O_1$ et $1 \in O_2$. Par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1 - 2\varepsilon, 1 + 2\varepsilon) \subset O_2$ et ainsi $O_1 \times (1 - 2\varepsilon, 1 + 2\varepsilon) \subset J$. En particulier, le point $(1, 1 + \varepsilon) \in J$ ce qui est faux.

Plus compliqué est le raisonnement alternatif suivant: $X \times Y$ (muni de la topologie produit) est métrisable par la distance

$$d((a,b),(x,y)) = d_1(x,a) + |b-y|$$

(ici d_1 est la distance "zero-un" qui engendre la topologie discrète). On observe que $(1,1) \in J$ et que $(1, 1+1/n)$ converge vers $(1,1)$ pour la distance d, mais $(1, 1+1/n) \notin J$ ce qui rend impossible d'avoir un voisinage de $(1,1)$ contenu dans J !