Corrigé DS intégration, année 2017-2018.

Exercice 1(2+2=4 points) *A) Énoncer le théorème de la convergence monotone.*
B) Rappeler la définition d'une tribu de $\mathbb{R}^d$.
Correction: Relire le cours svp.

Exercice 2*(1+1+1+2=5 points) On rappelle que la tribu borélienne est la plus petite tribu de $\mathbb{R}^d$ qui contient les ouverts de $\mathbb{R}^d$. De plus, un élément de la tribu borélienne est appelé un borélien. Montrer que les parties suivantes sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$:*
C) Une droite de $\mathbb{R}^2$.
D) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^4 \geq 2\}$.
E) $\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}^\star} [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}] \right) \times \{0\}$.
F) Pouvez-vous déterminer précisément l'ensemble de la question E ?

Correction
Première remarque : le complémentaire d'un fermé est un ouvert, donc un borélien. Une tribu étant stable par passage au complémentaire, tous les fermés sont des boréliens.

C) Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$. Il existe alors des réels a, b et c tels que D est l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient $ax + by + c = 0$. On a donc $D = f^{-1}(\{0\})$ où f est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $ax + by - c$. f est polynomiale donc continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Donc l'image réciproque du fermé $\{0\}$ est un fermé : D est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$, et donc un borélien.

D) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^4 \geq 2\} = g^{-1}([2, +\infty[)$ où g est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $x^2 + y^4$. g est polynomiale donc continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Donc l'image réciproque du fermé $[2, +\infty[$ est un fermé : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^4 \geq 2\}$ est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$, et donc un borélien.

E) $\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}^\star} [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}] \right) \times \{0\}$. Quels que soient le rationnel r et l'entier n dans $\mathbb{N}^*$, $[r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}] \times \{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ donc un borélien. Une tribu étant stable par union dénombrable et par passage au complémentaire, elle est également stable par intersection dénombrable : donc quel que soit $r \in \mathbb{Q}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^\star} [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}] \times \{0\}$ est un borélien. Enfin, une tribu étant stable par union dénombrable et $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, $\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}^\star} [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}] \right) \times \{0\}$ est un borélien.

F) Commençons par prouver que quel que soit r, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^\star} [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}] = \{r\}$: il est clair que quel que soit $n > 0$, $r \in [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}]$, donc $r \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}]$. Soit maintenant $r_1 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}]$. On suppose $r_1 \neq r$. Alors pour $n > \frac{1}{\sqrt{|r_1 - r|}}$, on a $r_1 \notin [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}]$. Par conséquent $r_1 = r$ et on a bien $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}] = \{r\}$. On en déduit que $\left(\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} [r - \frac{1}{n^2}, r + \frac{1}{n^2}]\right) \times \{0\} = \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} \{(r, 0)\} = \mathbb{Q} \times \{0\}$.

Exercice 3(2+2+1+2=7 points) *Pour tout $x \in]0, 2[$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n(x) = \frac{x^{2n}(2-x)}{2^{2n+1}}$.*
G) Expliquer pourquoi les deux quantités $\int_0^2 \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_0^2 f_n(x)dx$ définissent bien deux valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et expliquer pourquoi ces deux valeurs sont sont égales :

$$\int_0^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^2 f_n(x)dx$$

H) Déterminer la valeur exacte de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$ (on justifiera aussi pourquoi la série converge).

I) Pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, on note $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$. Prouver que $(S_N)_{N\geq 1}$ est une suite convergente

J) Calculer la limite $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N$ Ã l'aide des deux dernières questions.

Correction

G) Notons $s_n(x) = \sum_{k=1}^N f_k(x)$. Les fonctions f_n sont positives sur $(0, 2)$. Pour x fixé, la somme $f(x) = \sum_n f_n(x)$ est soit bornée (et donc convergente, car $(s_n(x))_m$ est croissante), soit non-bornée ; dans ce dernier cas $(s_n(x))_n$ tend vers $+\infty$. Ainsi, pour tout $x \in (0, 2)$, $f(x)$ est une valeur bien définie dans $\mathbb{R}_+ \cap \{+\infty\}$. On observe que les fonctions f_n sont continues, donc mesurables; il en suit la mesurablilité s_n pour tout n et puis de f en tant que limite simple de la suite (s_n).

Par le théorème de convergence monotone (appliqué à la suite de fonctions $(s_n)_n$ en $(*)$), on a

$$\sum_{k\geq 0} \int_{(0,2)} f_k = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \int_{(0,2)} f_k \lim_n \int_{(0,2)} s_n \overset{(*)}{=\!=} \int_{(0,2)} \lim_n s_n = \int_{(0,2)} f.$$

H) En mettant les deux fraction sur un dénominateur en commun il est clair que $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = o(\frac{1}{n^2})$. La convergence de la série découle ainsi du critère de Riemann. On observe de plus que

$$\sum_{n\geq 0} \int_{(0,2)} f_n = \sum_n \left(\int_0^2 \left(\tfrac{x}{2}\right)^{2n} dx - \int_0^2 \left(\tfrac{x}{2}\right)^{2n+1} dx\right) = 2 \sum_n \left(\tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n+2}\right).$$

D'autre part, par (G), cette somme est égale à $\int_{(0,2)} f$. On voit par série géométrique que

$$f(x) = \tfrac{(2-x)}{2} \sum_n \left(\tfrac{x}{2}\right)^{2n} = \tfrac{(2-x)}{2} \tfrac{1}{1-(\frac{x}{2})^2} = \tfrac{2(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \tfrac{2}{2+x}$$

Ainsi, $\int_0^2 f(x)dx = 2(\ln(4) - \ln(2)) = 2\ln(2)$. Il en suit que

$$\sum_n \left(\tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n+2}\right) = \ln(2).$$

I) La suite $(\frac{1}{k})_{k\geq 1}$ décroît monotonément vers zéro. La le théorème de Leibniz sur la convergence alternée, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge. Observons que

$$S_{2N} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{n=0}^{N-1} \left(\tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n+2}\right)$$

J) Ainsi, par (I) et (H), $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Parmi les outils vus en cours/TD pour inverser des limites $\lim \int = \int \lim$, *on se permet de rappeler l'énoncé du théorème de la convergence dominée :*

Théorème 1. *Considérons une suite de fonctions mesurables $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui convergent presque partout vers une fonction mesurable f :*

$$p.p.\ x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

On suppose qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qui domine toutes les fonctions f_n :

$$p.p.\ x \in \mathbb{R}^d \quad |f_n(x)| \leq g(x)$$

Alors $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)d\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)d\lambda_d(x).$

Exercice 4

(1+1+1+1=4 points)

Pour chacune des intégrales suivantes, montrer que les fonctions considérées sont intégrables (si n est assez grand) et calculer les limites lorsque $n \to +\infty$

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) dx$
2. $\int_{-1}^1 \frac{1-(1-x^2)^n}{\sqrt{|x|}} dx$
3. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2+\sin(x/n)} dx$

4. $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-1}{n}x^2+x}dx$

Correction

1. On note pour tout $n > 0$ f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $e^{-x}\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$. f_n est continue donc mesurable sur $\mathbb{R}^+$. De plus $\lim_{+\infty} x^2 f_n(x) = 0$ donc f_n est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, on en déduit que f_n est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour déterminer $\lim \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x)dx$. on va appliquer le théorème de convergence dominée. On a pour tout réel x $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. De plus, pour tout réel positif x et tout entier $n > 0$, $0 \leq \ln(1+\frac{x^2}{n}) \leq \frac{x^2}{n} \leq x^2$. Par conséquent, pour tout réel positif x et tout entier $n > 0$, $|f_n(x)| \leq x^2e^{-x}$. Or la fonction g qui à tout réel positif x associe x^2e^{-x} est intégrable sur $\mathbb{R}^+$: en effet elle est continue sur $\mathbb{R}^+$, et $\lim_{+\infty} x^2g(x) = 0$: donc g est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. On peut donc bien appliquer le théorème de convergence dominée à la suite f_n, et on en déduit
$$\lim \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)dx = 0.$$

2. On note pour tout $n > 0$ f_n la fonction de $[-1,1]$ dans $\bar{R}$ qui à x associe $\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{|x|}}$. f_n est continue sur $[-1,1]\backslash\{0\}$ donc mesurable sur $[-1,1]$. De plus on a pour tout réel x dans $[-1,1]$, $\frac{|1-x^2|^n}{\sqrt{|x|}} \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Or la fonction g qui à tout x de $[-1,1]$ associe $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ est intégrable (fonction de référence pour les intégrales de Riemann : les intégrales $\int_0^1 |g(x)|dx$ et $\int_{-1}^0 |g(x)|dx$ sont finies). Donc quel que soit n, f_n est intégrable. Pour déterminer $\lim \int_{-1}^1 f_n(x)dx$ on va appliquer le théorème de convergence dominée. On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. De plus, comme on l'a vu plus haut, on a pour tout réel x dans $[-1,1]$ et tout entier $n > 0$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Or la fonction g qui à tout x de $[-1,1]$ associe $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ est intégrable. On peut donc bien appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n), et on en déduit
$$\lim \int_{-1}^1 \frac{1-(1-x^2)^n}{\sqrt{|x|}}dx = 0.$$

3. On note pour tout $n > 0$ f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\exp(-x^2 + \sin(x/n))$. f_n est continue donc mesurable sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{+\infty} x^2 f_n(x) = 0$ donc f_n est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, on en déduit que f_n est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le même raisonnement en $-\infty$ montre que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour déterminer $\lim \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$. on va appliquer le théorème de convergence dominée. On a pour tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \exp(-x^2)$. De plus, pour tout réel x et tout entier $n > 0$, $\sin(x/n) \leq 1$. Donc $-x^2 + \sin(x/n) \leq -x^2 + 1$, et enfin, la fonction exp étant croissante et positive,

$\forall n > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| = \exp(-x^2 + \sin(x/n)) \leq \exp(-x^2 + 1)$ Or la fonction g qui à tout réel x associe $\exp(-x^2 + 1)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$: en effet elle est continue sur $\mathbb{R}$, et $\lim_{+\infty} x^2 g(x) = 0$: donc g est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (idem en $-\infty$). On peut donc bien appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n), et on en déduit

$$\lim \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2+\sin(x/n)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

4. On note pour tout $n > 0$ f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $e^{\frac{-1}{n}x^2+x}$. f_n est continue donc mesurable sur $\mathbb{R}^+$. De plus $x^2 f_n(x) = x^2 \exp(\frac{-1}{n} x^2 (1 - \frac{n}{x}))$. On en déduit $\lim_{+\infty} x^2 f_n(x) = 0$ donc f_n est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit que f_n est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus on a pour tout réel x $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = e^x$. La limite $x \mapsto e^x$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (en effet elle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$) on ne pourra donc pas appliquer le théorème de convergence dominée. Vérifions qu'on peut appliquer le théorème de convergence monotone : les f_n sont bien positives. On a pour tout réel x et tout entier $n > 0$, $\frac{x^2}{n+1} \leq \frac{x^2}{n}$ donc $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Pour tout réel x, la suite $(f_n(x))$ est donc bien une suite croissante. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à la suite (f_n), et on en déduit

$$\lim \int_0^{+\infty} e^{\frac{-1}{n}x^2+x} dx = \int_{\mathbb{R}^+} e^x dx = +\infty.$$

— Fin —