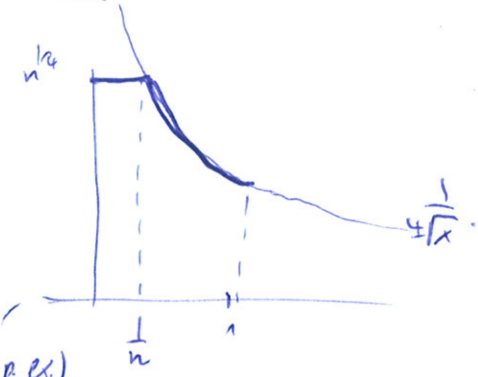
DS analyse fonctionnelle, 2018.

(a) $\|\cdot\|_2$ est une norme ✓.



$f_n(x) = \min(n^{1/4}, x^{-1/4})$.

$f_n \xrightarrow{L_2(0,1)} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = f(x)$ par cv domin.
($f(0)=42$, p.ex.)

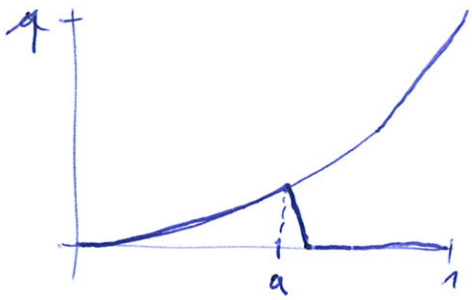
donc (f_n) L_2-Cauchy, mais (peu importe la val. de $f(0)$) $f \notin \mathcal{C}([0,1])$ car non-borné.

(b) $$|u(f)| \le \left(\int_0^a x^4\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$= \frac{a^{5/2}}{\sqrt{5}}\cdot\|f\|. \quad \text{Donc} \quad \|u\| \le \frac{a^{5/2}}{\sqrt{5}}.$$

Le cas d'égalité pour Cauchy-Schwarz est $f = 1\!\!1_{[0,a]}(x)\cdot x^2$; cette fonct. n'étant pas continue, on l'approche:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2, & x \le a \\ -na^2x + (a^2+na^3) \\ 0, & x \ge a+\frac{1}{n} \end{cases}$$



$$u(f_n) = \int_0^a x^2\cdot x^2\,dx = \frac{a^5}{4}$$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^a x^4\,dx + \int_a^{a+1/n} \underbrace{\left(-na^2x + (a^2+na^3)\right)^2}_{\le a^4} dx \le \frac{a^5}{5} + \frac{a^4}{n}.$$

$\rightsquigarrow$ $\|f_n\|_2 \longrightarrow \frac{a^{5/2}}{\sqrt{5}}$ et

$$\frac{u(f_n)}{\|f_n\|} \longrightarrow \frac{a^{5/2}}{\sqrt{5}}.$$

(c) Dans $L_2(0,1)$, l'unique fonct. g est $1\!\!1_{[0,a]}(x)\cdot x^2 \notin \mathcal{C}([0,1])$!
(Riesz)

Q2. OR $\sum |(e_n|x)|^2 \leq \|x\|^2$, $(e_n|x) \longrightarrow 0$ $\forall x$

donc $e_n \longrightarrow 0$.

Mais l'unicité de lim. faibles donne que si $e_n \longrightarrow x$ alors $x=0$ ce qui est impossible car $\|e_n\|=1$.

Q3. Soit (x_n) $\|\cdot\|_T$ - Cauchy, càd.

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n,m \geq N$: $\|x_n - x_m\| + \|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon$

Ceci implique (x_n) Cauchy dans X et
(Tx_n) Cauchy dans Y

OR X, Y complets $\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ Tx_n \longrightarrow y. \end{cases}$

Par hypoth. T fermé donc $Tx = y$.

Ainsi, $\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - y\|_Y \longrightarrow 0$

Q4. (a) (i) $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $l_j = \lim\limits_{k\to\infty} f_j(k)$.

$$|l_n - l_m| = \left| \lim_{k\to\infty} f_n(k) - \lim_{k\to\infty} f_m(k) \right|$$

$$= \cancel{\le} \lim_{k\to\infty} \underbrace{|f_n(k) - f_m(k)|}_{\leq \varepsilon \text{ si } n,m \geq N_\varepsilon}$$

$$\le \cancel{\limsup_{k\to\infty}}$$

car (f_j) $\|\cdot\|_\infty$ - Cauchy.

(ii) Soit (f_n) suite de c_e, $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

Soit $l_n = \lim\limits_{k\to\infty} f_n(k)$. Par (a) $l_n \xrightarrow{n\to\infty} l$.

On remarque

$$|f(k) - \ell| \leq \underbrace{|f(k) - f_n(k)|}_{\leq \|f - f_n\|_\infty} + \underbrace{|f_n(k) - \ell_n|}_{\substack{< \varepsilon \\ \forall k \geq K_n}} + \underbrace{|\ell_n - \ell|}_{\substack{< \varepsilon \\ \forall n \geq N.}}$$

Il ex. N t.q.

Pour $n \geq N$, $\begin{cases} |\ell_n - \ell| < \varepsilon. \\ \|f - f_n\|_\infty < \varepsilon \end{cases}$ | Pour cet n, il ex. K_n t.q. $|f_n(k) - \ell_n| < \varepsilon$.

~~t.q.~~

Ainsi, on a trouvé pour $\varepsilon > 0$ un $K = K_n$ t.q.

$\forall k \geq K$, $|f(k) - \ell| < 3\varepsilon$, ce qui prouve $f \in c_\ell$ //

(iii) Comme sev fermé d'un sp. de Banach (ℓ_∞), c_ℓ est complet //

(b) (i) Soit $f \in \ell_\infty$; $\left|(Tf)(k)\right| = \left|\sum_j a_{kj} f(j)\right|$

$$\leq \sup_j |f(j)| \cdot \underbrace{\sup_k \sum |a_{kj}|}_{= C < \infty}$$

par (B).

Ainsi, $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ (clairement lin.) est borné.

(ii) Observons que $\lim_{k \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{N-1} a_{kj} \right)$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} \underbrace{\left(\lim_{k \to \infty} a_{kj} \right)}_{=0} = 0.$$

Ainsi, $1 = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\right) = 0 + \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=N}^{\infty} a_{kj}\right).$

(iii) la décomposition est élémentaire.

OR $\sum_{j>N}^{\infty} a_{kj} \xrightarrow{k\to\infty} 1$, le dernier terme cv. vers s.

Par (B), $\left|\sum_{j=N}^{\infty} a_{kj}(s_j - s)\right| \leq \underbrace{|s_j - s|}_{\longrightarrow 0} \cdot \underbrace{\sup_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|}_{= C}$

et $\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{N-1} a_{kj}\, s_j\right)$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} \left(\lim_{k\to\infty} a_{kj}\right) \cdot s_j = 0.$$

Conclusion Soit $f \in c_\ell \subset \ell_\infty$. Alors $Tf \in \ell_\infty$ par (i) et $\lim_{k\to\infty} (Tf)(k) = \lim_{k\to\infty} f(k)$ par (iii) ce qui montre $Tf \in c_\ell$.

Donc : $T : c_\ell \to c_\ell$ est lin. (et borné) sur c_ℓ et préserve les limites.

(C) (1) Soit $f(k) = \delta_{jk}$ (Pour j fixé). Clairement, $\lim_{k\to\infty} f(k) = 0$.

OR, $\lim_{k\to\infty} (Tf)(k) = 0$, et $(Tf)(k) = a_{kj}$,

$$\lim_{k\to\infty} a_{kj} = 0 \quad \forall j.$$

(ii) $f(k)=1 \ \forall k$. Donc $f(k)\to 1$, donc $(Tf)(k)\to 1$

ce qui se traduit en

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} = 1 \text{, donc } (C).$$

$f\in c_0 \Rightarrow \lim f(k)=0$
$\Rightarrow \lim (Tf)(k)=0$
$\Rightarrow Tf\in c_0$

(iii) "$\Rightarrow$" même preuve que (b)(i).

donc $T(c_0)\subset c_0$

"$\Leftarrow$" fixons i,n et posons $f_{i,n}(k) = 1\!\!1_{[0,n)}(k)\,\text{signe}(a_{ik})$

avec $\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0. \end{cases}$

OR $f_{i,n}\in c_0$, $T_0 f_{i,n}\in c_0$ et, plus précisément, $\|T_0 f_{i,n}\| \leq \|T_0\|\cdot \underbrace{\|f_{i,n}\|}_{=1}$.

Mais $(T_0 f_{i,n})(k) = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$; par passage $n\to\infty$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \leq \|T_0\| \quad \text{pour tout } k \rightsquigarrow (B).$$

(iv) Cours.

(v) fixons $i\geq 1$; $\ell_N(f) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, f(j)$

Clairement, ℓ_N est lin. et continue:

$$|\ell_N(f)| \leq \|f\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|.$$

Par hypoth. $\lim_{N\to\infty} \ell_N(f)$ ex. pour tout f

$\overset{B.-S.}{\rightsquigarrow}$ $\ell: c_0\to\mathbb{R}$ est continue et lin.

(vi) Avec $|\ell(f_{i,n})| \leq C\cdot \|f_{i,n}\| = C$

on a $\sum_j |a_{ij}| \leq C$ pour tout i.

(vii) $$\left|(T_0 f_n)(i)\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} f_n(j)\right|$$

$$\leq \underbrace{\sup_j |f_n(j)|}_{=\|f_n\|_\infty \to 0 \text{ car } f_n \to 0.} \cdot C_i$$

donc $(T_0 f_n)(i) \longrightarrow 0$ pour tout i

OR $T_0 f_n \to g$, $(T_0 f_n)(i) \longrightarrow g(i)$

ce qui implique $g(i) = 0$ $\forall i$ donc $g = 0$!

Par le th du graphe fermé,

$$\left.\begin{array}{l} f_n \longrightarrow 0 \\ T_0 f_n \longrightarrow g \end{array}\right\} \Rightarrow g = 0 \ (\text{donc } g = T(0))$$

montre T_0 fermé. ~~Par~~ ~~Or~~ c_0 complet

donc T_0 borné sur c_0. Par (c)(iii)

ceci implique (B).

— FIN —