ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017 / 2018
DEVOIR SURVEILLE
Master 1, cours de «Théorie spectrale»
Ni documents ni matériel électroniques sont autorisés.

Penser à bien justifier vos réponses.
La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction.
Vous pouvez rédiger vos réponses en français ou en anglais (mais une seule langue par composition)

Question 1 Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Sur E, on définit

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt \quad , \quad \|f\|^2=\langle f,f\rangle=\int_0^1 f(t)^2\,dt.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E mais que E n'est pas complet pour cette norme.
(b) Soit $0<a<1$ et $u(f)=\int_0^a x^2 f(x)dx$. Montrer que u est une forme linéaire continue sur E. Calculer sa norme.
(c) Montrer qu'il n'existe pas de $g\in E$ tel que $u(f)=\langle f,g\rangle$ pour tout $f\in E$.

Question 2 Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et (e_n) une suite orthnormale. Est-ce que $(e_n)_{n\geq 1}$ converge? Converge faiblement?

Question 3 Soient X,Y deux espaces de Banach et E un sous espace vectoriel de X. Soit $T:E\to Y$ un opérateur linéaire (de graphe) fermé. Monter que E, muni de la norme du graphe

$$\|x\|_T=\|x\|_X+\|Tx\|_Y$$

est un espace de Banach.

Question 4 Dans cet exercice on étudie $c_\ell\subset\ell^\infty$, l'espace des suites réelles ayant une limite.

(a) (i) Pour tout $j\in\mathbb{N}$, soit $f_j:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ une suite convergeante et $l_j=\lim_{k\to\infty} f_j(k)$. Montrez que si $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans ℓ^∞ alors $(l_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
   (ii) En déduire que c_ℓ est un sous-espace fermé de ℓ^∞.
   (iii) En déduire que c_ℓ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.

On va montrer par la suite le **Théorème de Toeplitz** suivant:
Soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une suite à double indices (une matrice infinie) de nombres réels. Pour $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$, on pose $\sigma_i:=\sum_j a_{ij}s_j$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(I) L'application $T:(s_j)\mapsto(\sigma_j)$ est une application linéaire sur c_ℓ et pour tout $(s_j)\in c_\ell$ on a

$$\lim_{i\to\infty}\sigma_i=\lim_{j\to\infty}s_j.$$

(II) (A) Pour tout $j\in\mathbb{N}$, $\quad\lim_{i\in\mathbb{N}} a_{ij}=0$
(B) $\sup_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_{ij}|<\infty$.
(C) $\lim_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}\right)=1$.

(b) Nous allons d'abord montrer que (II) implique (I). On suppose donc dans cette question que $(a_{i,j})$ vérifie ces trois propriétés.
   (i) Utilisez (B) pour montrer que T définit un opérateur linéaire borné sur ℓ_∞.
   (ii) Montrez que, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\geq N} a_{ij}\right)=1$.
   (iii) Soit (s_j) convergeant vers s et $N\in\mathbb{N}^*$. En écrivant

$$\sigma_i=\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}s_j=\sum_{j<N} a_{ij}s_j \quad+\quad \sum_{j\geq N} a_{ij}(s_j-s) \quad+\quad s\sum_{j\geq N} a_{ij},$$

   montrer que $\sigma_i\to s$. Conclure.

— TOURNER LA PAGE, S.V.P. —

(c) Nous allons maintenant montrer que (I) implique (II).

(i) Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé considérer $(s_j) = (\delta_{kj})$ pour déduire (A).

(ii) Soit $s_j = 1$ pour tout j. Déduire (C).
Reste à montrer (B).

(iii) Justifier $T(c_0) \subset c_0$. On peut donc considérer $T_0 = T|_{c_0}$ comme application linéaire sur c_0. Montrer que (B) est équivalent à ce que T_0 soit un opérateur linéaire *borné* sur c_0. Indications:

"$\Rightarrow$" utiliser (b)(i).

"$\Leftarrow$" Pour i, n fixé, considérer $\|T_0 f_{i,n}\|_{c_0}$ pour $f_{i,n}(k) = \mathbb{1}_{[0,n]}(k)\text{signe}(a_{ik})$ et laisser $n \to \infty$.

Observons que dans (I), T n'est pas supposé borné sur c_ℓ - si s'était le cas, la démonstration s'arrêterait ici.

(iv) Enoncer le théorème du graphe fermé.
On suppose désormais que (f_n) est une suite dans c_0 et que $f_n \to 0$ et $T_0 f_n \to g$.

(v) Soit i fixé, et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dans c_0. On pose $\ell(f) = \lim_{N\to\infty} \ell_N(f)$ où $\ell_N(f) = \sum_{j=1}^N a_{ij} f(j)$. Montrer que $\ell_N : c_0 \to \mathbb{C}$ est continue, en déduire que $\ell : c_0 \to \mathbb{C}$ est continue.

(vi) Déduire que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_j |a_{ij}| =: C_i < \infty$$

(ce qui manque pour obtenir (B) est de savoir si $\sup C_i < \infty$).

(vii) Montrer pour tout i l'inégalité

$$(T_0 f_n)(i) \leq C_i \sup_j |f_n(j)|$$

puis déduire $g = 0$ et conclure.

— FIN —