université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019 / 2020
LICENCE 3

Collège Sciences et technologies

Examen Calcul Différentiel et Équations différentielles
Durée : 3h00

Ni documents, ni équipements électroniques sont autorisés.

Question 1 *(Barème indicatif: 2.5 points)* Pour $t > 0$ on considère l'équation différentielle

$$y'(t) = \tfrac{y}{t}\left(\ln(y) - \ln(t) + 1\right) \qquad y(1) = 4$$

(a) Montrer qu'il existe une unique solution dans un voisinage U de $t = 1$.
(b) Soit y cette solution. Quelle équation différentielle satisfait alors $z(t) := \frac{y(t)}{t}$ sur U?
(c) Déterminer z, puis en déduire y, et vérifier qu'il s'agit bien de la solution recherché.

Indication: la dérivée de la fonction $u \mapsto \ln(\ln(u))$ peut aider.

Question 2 *(Barème indicatif: 2 points)* Trouver toutes les solutions de

$$y^{(4)}(t) - y^{(3)}(t) - y''(t) - y'(t) - 2y(t) = -2t^2 - 3t$$

Indication: le polynôme caractéristique possède deux racines simples, qui sont faciles à deviner.

Question 3 *(Barème indicatif: 3.5 points)* Donner toutes les solutions de $y'(t) = Ay(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^3$ des valeurs initiales y_0 pour lesquelles le problème de Cauchy

$$y'(t) = Ay(t), \qquad y(0) = y_0 \in E$$

ait une solution 'stable' c'est à dire, satisfaisant $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Question 4 *(Barème indicatif: 3.5 points)* Soit $X : I \to \mathbb{R}^2$, $X(t) = (x(t), y(t))^{\mathsf{t}}$. On souhaite étudier le problème de Cauchy suivant :

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} X'(t) &= \left(y(t) - x(t)^3, -x(t) - y(t)^3\right)^{\mathsf{t}} \\ X(0) &= (x_0, y_0)^{\mathsf{t}} \end{cases}$$

(a) Montrer que E admet une unique solution maximale, qu'on notera (X, I).
Soit $I_+ := I \cap [0, \infty)$ et $I_- = I \cap (-\infty, 0)$.
(b) On définit l'énergie $H(t) := x(t)^2 + y(t)^2$. Montrer que $H(t)$ est décroissante sur I_+, puis expliciter I_+.
(c) Montrer qu'on a, pour tout $t \in I$,

$$-2H^2(t) \leq H'(t) \leq -H^2(t).$$

(d) En déduire que I_- est minoré: proposer un minorant explicite de I en fonction de x_0 et y_0.
(e) Montrer que X admet une limite lorsque $t \to +\infty$; la déterminer.

TOURNER LA PAGE, S'IL VOUS PLAÎT

Question 5 *(Barème indicatif: 2 points)* Soit

$$F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2 + 2x - 2y + u\cos(x) + \arctan(v) \\ xy + \cos(xv) - e^{u^2} + (x-1)v \end{pmatrix}.$$

(a) Énoncer le théorème des fonctions implicitement définies.
(b) Montrer qu'il existent deux voisinages U, V de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction $g : U \to V$ de classe C^1 tel que, $f(x,y,g(x,y)) = 0$ sur U.
(c) Quel est le polynôme de Taylor d'ordre 1 de g au point $(0,0)$?

Question 6 **(question de cours)** *(Barème indicatif: 2.5 points)* Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a \in \Omega$. Soit $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\Omega \setminus \{a\})$. Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ existe. On pose alors

$$\widehat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

(a) Montrer que si $d_k := \lim\limits_{x\to a} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x)$ existe pour tout $k = 1..n$, alors $\widehat{f}$ est différentiable en $x{=}a$; de plus, sa différentielle est représenté par le vecteur en ligne $\nabla \widehat{f}(a) = (d_1, \ldots, d_n)$.
Indication: relier $f(a)$ et $f(a+h)$ par une courbe paramétré (une ligne droite, par exemple) pour utiliser le théorème fondamental du calcul différentiel.
(b) Justifier que $\widehat{f}$ est même de classe $C^1(\Omega)$.

Question 7 *(Barème indicatif: 5 points)* Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2. On suppose que $F(x^*) = 0$ et que la différentielle $D_F(x^*)$ est inversible.

(i) Montrer que la différentielle $D_F(x)$ est inversible pour tout $x \in B(x^*, R)$, pour un certain $R > 0$.

(ii) Montrer que $D_F(x^* + h)^{-1} - D_F(x^*)^{-1} = O(\|h\|)$ lorsque $h \to 0$.
Indication: l'identité $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B-A)B^{-1}$ s'avère utile.

(iii) Expliciter le polynôme de Taylor de degré 1 de F au point x^*.

(iv) Pour $x \in B(x^*, R)$, soit $N(x) = x - D_F(x)^{-1}(F(x))$. Montrer que N est différentiable en $x = x^*$ en développant $N(x^* + h) - N(x^*)$. Expliciter $D_N(x^*)$

(v) Montrer qu'il existe $0 < r < R$ tel que $\|D_N(x)\| \le \frac{1}{2}$ pour tout $x \in A := B[x^*, r]$. En déduire que $N(A) \subset A$.

(vi) Déterminer la limite de la suite récursive, définie par $x_0 \in A$ et

$$x_{n+1} := N(x_n) \qquad \text{pour } n \ge 0.$$

Énoncer le théorème utilisé et vérifier soigneusement les hypothèses.

— FIN —