Université de Bordeaux
Master 1, EDP1.

Devoir surveillé
(durée 2h, documents non autorisés)

Exercice 1: *On considère les fonctions f_+ et f_- définies par:*

$$f_-(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \geq 0 \\ e^t & \text{pour} \quad t < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f_+(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad t < 0 \end{cases}$$

(1) *Calculer les transformées de Fourier $\widehat{f_+}$ et $\widehat{f_-}$.*
On a
$$\widehat{f_+}(\xi) = \tfrac{1}{1+i\xi} \qquad \widehat{f_-}(\xi) = \tfrac{1}{1-i\xi},$$
par calcul élémentaire.
On considère l'équation différentielle
$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f_-(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{E}$$

(2) *Supposons que $y, y' \in L^1(\mathbb{R})$. Expliquer pourquoi $y'' \in L^1(\mathbb{R})$.*
Observons $y'' = f_- - y - 2y' \in L^1$.

(3) *Soit $y \in L^1(\mathbb{R})$ une solution de* (E) *avec $y' \in L^1$. Quelle équation vérifie alors $\widehat{y}$?*
$y, y' \in L^1$ donne que l'équation (E) est "transformable" par Fourier. Il suit que
$$(-\xi^2 + 2i\xi + 1)\widehat{y}(\xi) = \tfrac{1}{1-i\xi}$$

(4) *Déterminer la solution y de (E) vérifiant $y, y' \in L^1(\mathbb{R})$.*
Observons que l'équation ci-dessus est $(1+i\xi)^2\widehat{y}(\xi) = (1-i\xi)^{-1}$, donc $\widehat{y}(\xi) = (1+\xi^2)^{-1}(1+i\xi)^{-1}$. Puisque $f_+ + f_- = \exp(-|x|)$ a pour transformation de Fourier $\frac{2}{1+\xi^2}$, il suit que y est la convolution de $\frac{1}{2}\exp(-|x|)$ avec f_+. Un calcul montre
$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^t & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{4}(1+2t)e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2: *On considère la fonction "porte" Π définie par :*

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) *Calculer la transformée de Fourier $\widehat{\Pi}$.*
Calcul simple: $\frac{2}{\xi}\sin(\xi/2)$.

(2) *Soit Λ la fonction "triangle" définie par :*
$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{pour } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On note Λ' sa dérivée au sens des distributions. Montrer que $\Lambda' = h$ avec h la fonction définie par $h(t) = \Pi(t + \frac{1}{2}) - \Pi(t - \frac{1}{2})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Une IPP sur

$$-\int_{\mathbb{R}} \Lambda(t)\varphi'(t)dt = \int_{-1}^{0}(1+t)\varphi'(t)dt + \int_{0}^{1}(1-t)\varphi'(t)dt$$

montre que

$$\Lambda'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [-1,0) \\ -1 & \text{si} \quad t \in (0,1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Il est facile de voir que c'est la fonction h.

(3) *En déduire la transformée de Fourier de* Λ.
Rappelons que si $g(t) = f(t+a)$, alors $\widehat{g}(xi) = e^{ia\xi}\widehat{f}(\xi)$. Aussi, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$. Ainsi,

$$\widehat{\Lambda}(\xi) = (i\xi)^{-1}\widehat{h}(\xi) = (i\xi)^{-1}\tfrac{2}{\xi}\sin(\xi/2)(e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}) = \tfrac{4}{\xi^2}\sin^2(\xi/2)$$

(4) *Vérifier que* $\Lambda = \Pi \star \Pi$. Vu que $\widehat{\Lambda}(\xi) = \widehat{\Pi}^2$ ceci est évident par inversion de Fourier.

Exercice 3 : *Résoudre pour* $(x,y) \in [1,\infty) \times \mathbb{R}$ *l'équation aux dérivées partielles linéaire :*

$$x\,u_x + y\,u_y = 2\,x\,y$$

vérifiant $u(r,r^2) = 2$ *pour* $r \geq 1$ *par la méthode des caractéristiques.*
Ansatz:

$$\begin{array}{ll} dx/ds(r,s) = x(r,s), & x(r,0) = r \\ dy/ds(r,s) = y(r,s), & y(r,0) = r^2 \\ dz/ds(r,s) = 2x(r,s)y(r,s), & z(r,0) = 2 \end{array}$$

Calcul des edo's découplés:

$$x(r,s) = re^s, \qquad y(r,s) = r^2e^s$$

ce qui donne $dz/ds = 2e^{2s}r^3$ et donc $z(r,s) = e^{2s}r^3 + (2 - r^3)$. On a $r(x,y) = y/x$ et $x = e^s y/x$ donc $s(x,y) = \ln(x^2/y)$. Conclusion:

$$u(x,y) = z(r(x,y), s(x,y)) = xy - (y/x)^3 + 2.$$

Test: $u_x = y + 3y^3/x^4$ et $u_y = x - 3y^2/x^3$, Ainsi $xu_x + yu_y = 2xy$ et $u(x,x^2) = 2$.

Exercice 4 : *Résoudre pour* $(t,x,y) \in [1,\infty) \times \mathbb{R}^2$ *l'équation aux dérivées partielles quasi-linéaire :*

$$2u_t + (u_x + u_y)\tan(u) = 0$$

avec la condition initiale $u(1,r) = \arctan(p+q)$ *où* $r = (p,q) \in \mathbb{R}^2$.
Ansatz:

$$\begin{array}{ll} dt/ds = 2 & t(p,q,0) = 1 \\ dx/ds = \tan(w) & x(p,q,0) = p \\ dy/ds = \tan(w) & y(p,q,0) = q \\ dz/ds = 0 & z(p,q,0) = \arctan(p+q) \end{array}$$

donc $t(p,q,s) = 2s + 1$ puis $z(p,q,s) = z(p,q,0) = \arctan(p+q)$. Ceci permet de simplifier lignes 2 & 3 ce qui donne

$$x(p,q,s) = (p+q)s + p \quad \textit{et} \quad y(p,q,s) = (p+q)s + q$$

il suit $x+y=(p+q)(2s+1)=(p+q)t$ donc

$$\begin{aligned}u(t,x,y)=&z(p(t,x,y),q(t,x,y),s(t,x,y))\\=&\arctan(p(t,x,y)+q(t,x,y))=\arctan(\frac{x+y}{t}).\end{aligned}$$

Test: $tan(u)=\frac{x+y}{t}$ et $u_t=\frac{-x-y}{t^2+(x+y)^2}$, $u_x=u_y=\frac{t}{t^2+(x+y)^2}$.