Exercice 1 Calculer les transformations de Fourier de

a) $f_1(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.
b) $f_2(x) = e^{-|x|}$.
c) $f_3(x) = e^{-|x|}\cos(x)$.
d) $f_4(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.
e) $f_5(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 2 Soit $f(x) = \cos(3x)$ pour $x \in (-\pi, \pi)$, $f(\pm\pi) = 1/2$ et $f(x) = 0$ pour $|x| > \pi$. Calculer la transformation de Fourier de f.

Exercice 3 Soit $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$, et $f(x) = 1 - |x|$ pour $|x| \leq 1$. Calculer sa transformation de Fourier.

Exercice 4 Exprimer la transformation de Fourier de $\cos(x)f(2x+1)$ en termes de $\widehat{f}(\xi)$.

Exercice 5 Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, une fois par transformation de Fourier (inverse), une fois en écrivant $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx}\,dt$.

Exercice 6 Soit f telle que $\widehat{f}(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi^4}$. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx$$

Exercice 7 Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}\,dx$.

Exercice 8 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}\,dy = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 9 Soit $f(x) = x\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Montrer $\widehat{f}(\xi) = -2i\frac{\sin\xi - \xi\cos\xi}{\xi^2}$.

Exercice 10 Soit $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$. Calculer sa transformation de Fourier en linéarisant $\cos(x)\cos(\xi x)$.

Exercice 11 Justifier l'existence de l'inégrale et calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ (indication:

Plancherel).

Exercice 12 Justifier l'existence de l'inégrale et calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4(x)}{x^4}\,dx$ (indication: convolution et Plancherel).

Exercice 13 Justifier l'existence de l'inégrale et calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

Exercice 14* Soit f une fonction satisfaisant $f(t) = f(2t) + f(2t-1)$. Que peut on dire de la transformation de Fourier de f?

Exercice 15 Soit $g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Trouver l'unique solution $y \in L^1(\mathbb{R})$ à l'équation homogène $y'' - y = 0$. Trouver une formule pour la solution y de $y'' - y = -g$, en supposant que $y \in L^1(\mathbb{R})$ par transformation de Fourier ("analyse"). Montrer par la suite que cette formule donne en effet une solution ("synthèse").

Exercice 16 Etablir une équation différentielle que satisfait la transformation de Fourier (en espace seulement, noté $\widehat{u}(\xi,t) = \mathcal{F}(u(\cdot,t))(\xi)$) de la solution de l'équation (des ondes)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sur $\mathbb{R}$ sujet aux conditions initiales

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

Soient $\phi_1(\xi,t)$ et $\phi_2(\xi,t)$ deux solutions indépendantes de l'équation homogène. On cherche une solution particulière par variation de la constante:

$$\widehat{u}(\xi,t) = a(\xi)\phi_1(\xi,t) + b(\xi)\phi_2(\xi,t)$$

traduire les conditions initiales pour u en conditions initiales pour $\widehat{u}$, puis conclure.

Exercice 17 Même question avec valeurs initiales $u(x,0) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.

Exercice 18 Résoudre $\frac{\partial u}{\partial t} = t\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sujet à $u(x,0) = f(x)$.

Exercice 19* Soit Q une matrice réelle, symétrique, positive définie de taille $n \times n$. Montrer que $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle)$ a pour transformation de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \exp(-1/2\langle Q^{-1}\xi, \xi\rangle). \tag{1}$$

Indication: montrer d'abord $\widehat{f}(\xi)\exp(+1/2\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}\langle Qy, y\rangle)\,dy$.

Exercice 20** Considérer $u_t = xu_y + u_{xx}$ sur $(0,\infty) \times \mathbb{R}^2$. Soit $v(t,\xi,\eta)$ la transformation spatiale (en x, y, mais pas en t) de u. Montrer $v_t + \eta v_\xi = -\xi^2 v$. Trouver v par la méthode de caractéristiques, puis utiliser (1) pour déduire une solution u.

Exercice 21 Soient $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnés par

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases} \qquad \omega(x) = \frac{1}{a}\,\psi(1-|x|^2) \qquad \omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega(x/\varepsilon)$$

où $a = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(1-|x|^2)\,dx$.

a) Démontrer que $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1} = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$.

b) Démontrer par récurrence que $\psi^{(n)}(t) = P_{2n}(1/t)e^{-1/t}$, $t > 0$ où P_k est un polynôme de dégrée k. En déduire que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que ω, $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) Pour un ensemble non-vide $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on pose $A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x,A) < \varepsilon\}$. Pourquoi est la fonction $\mathbb{1}_{A^\varepsilon}$ mesurable pour tout $\varepsilon > 0$?

d) On pose $\eta_\varepsilon = \mathbb{1}_{A^{2\varepsilon}} * \omega_\varepsilon$. Démontrer que

   i) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq \eta_\varepsilon(x) \leq 1$

   ii) $\forall x \in A^\varepsilon : \ \eta_\varepsilon(x) = 1$

   iii) $\forall x \notin A^{3\varepsilon} : \ \eta_\varepsilon(x) = 0$

Rappel: On définit pour $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ la convolution

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy$$

Exercice 22 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

1. Démontrer que $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. On traitera d'abord $p = \infty, 1$ et puis, en cas que $1 < p < \infty$ on multipliera $f * g$ par une fonction $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$ et utilisera ensuite l'inégalité de Hölder.

2. En déduire que $\|f * \omega_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$ (ici, ω_ε est la fonction définit plus haut).

Indication:

Exercice 23 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(\Omega)$. On suppose que $f = 0$ en dehors d'un compact $K \subset\subset \Omega$.

1. Montrer que $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) = \inf_{x\in K, y\in\partial\Omega} |x-y| > 0$.

2. Montrer que si $\varepsilon < \operatorname{dist}(K,\partial\Omega)$, $f_\varepsilon = f * \Omega_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

3. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ on a $f_\varepsilon \to f$ uniformément dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ si $\varepsilon \to 0+$.

4. Montrer que $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$.

5. Déduire de (c) et (d) que pour tout $f \in L^p_c(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$ on a $f_\varepsilon \to f$ dans la norme de $L^p(\Omega)$.