Exercice 1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ linéaire. Montrer que T est continu si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe un $C_K > 0$ et $M_K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : \qquad |\langle T, \phi \rangle| \leq C_K \max\{\|\partial^\alpha \phi\|_\infty : \quad |\alpha| \leq M_K\}.$$

Indication: la suffisance du critère est claire. Pour la nécissité, mimiquer la preuve de "continu $\Rightarrow$ borné" pour une application linéaire entre des e.v.n.

Convergence de distributions

Exercice 2 Soit (T_n) une suite de distributions qui converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Démontrer que (T_n') converge vers T'.

Exercice 3 Soit T_k la distribution associé à la fonction $f_k(x) = \Big(\cos(x/\sqrt{k})\Big)^k$. Montrer que (T_k) converge au sens des distributions vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.

Exercice 4 Soit $F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$. On note T_N la distribution associée à F_N (justifier que $T_{F_N} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$!). Le but de l'exercice est de déterminer la limite (au sens des distributions) de (T_N).

1. Montrer que la suite $(F_N(t))_N$ converge dans aucun point t (on distingue les multiples (ir)rationels de π). Remarque: ceci barre l'approche par convergence dominé exploité dans l'exercice précédent.

2. Montrer que $F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}$ pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à support dans $[-2M\pi, 2M\pi]$. Déduire de l'égalité précedente que
$$\langle T_N, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)} \psi(t) dt,$$
où $\psi(t) = \sum_{m=-M}^{M-1} \varphi(t + 2m\pi)$.

4. En écrivant $\psi(t) = \psi(0) + th(t)$, démontrer que T_N converge vers $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}$.

Espaces de Sobolev.

Exercice 5 Soit $I = (-1, 1)$.

a) Soit $f(x) = \text{signe}(x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Est-ce que $f \in H^1(I)$?

b) Montrer que la fonction
$$u : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+|x|}{2} \end{cases}$$
appartient à $H^1(I)$ et déterminer sa dérivée.

c) Montrer que toute fonction continue sur $\bar{I}$ et continument dérivable par morceaux sur $\bar{I}$ est une fonction de $H^1(I)$.

Exercice 6 Soit $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Est-ce que les fonctions suivantes appartiennent à $L_2(\Omega)$ ou à $H^1(\Omega)$?

$$u(x,y) := e^{-x} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \qquad v(x,y) := x^{1/3} \sin(\pi y)$$

Exercice 7 Soit (η_k) une suite de "fonctions plateaux" avec $\eta_k \in \mathcal{D}((0,1))$, $0 \leq \eta_k \leq 1$, et η_k constant à 1 sur $[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}]$. Expliciter le support de η_k'. Montrer que $f_k(x) = \eta_k(x) \sin(\pi x) \in \mathcal{D}((0,1))$ et que $f_k(x) \to \sin(\pi x)$ en norme H^1. En déduire que la fonction u de l'exercice précédent appartient à $H_0^1(\Omega)$. Obtenir le même résultat en discutant la régularité de Ω par un théorème du cours.

Exercice 8 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$

a) (DS 2017) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $\widehat{u}$ défini par $\widehat{u}(x) = u(x)$ si $x \in \Omega$ et $\widehat{u}(x) = 0$ sinon, définit une fonction dans $H^1(\mathbb{R}^d)$.

b) Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $\mathrm{supp}(u) \subset \Omega$. Alors $u \in H_0^1(\Omega)$. Indication: approcher u par une suite de fonctions $(\varphi_n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$, puis utiliser une fonction plateau pour conclure.

Exercice 9 *(Une inégalité de Poincaré)* Soit $f \in C^1([a,b])$ et $f(a) = 0$. En écrivant $f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$ montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (qui dépend de a, b), telle que

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \ \leq \ C \int_a^b |f'(x)|^2\,dx$$

Etendre au cas d'une fonction de classe C^1 sur bande $(t,x) \in [0,L] \times \mathbb{R}^{n-1}$ qui s'annule sur le bord $t \in \{0, L\}$.

Exercice 10 Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'inégalité de Poincaré pour $f \in H_0^1(I)$. Est-elle vraie pour $f \in H^1(I)$?

b) Soit $f \in H^1(I)$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \frac{1}{|I|} \int_I f dx$.

c) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f - f(c)\|_{L_2(I)} \leq C\|f'\|_{L_2(I)}$.

d) Etendre la preuve à un un convexe borné Ω de $\mathbb{R}^n$: il existe un $C > 0$, dépendant de Ω tel que, pour $f \in H^1(\Omega)$

$$\left\| f - \tfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f dx \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left\| \nabla f \right\|_{L_2(\Omega)}.$$