Exercice 1 Soit $(a,b) \subset \mathbb{R}$ et $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ de classe C^k. On pose

$$\Omega_f = \{(x,y) : \quad a < x < b \ \text{ et } \ y > f(x)\}.$$

Construire une application "applatissante" $\Phi : \Omega_f \to \mathbb{R}^2$ de classe C^k telle que $\Phi(\Omega_f) = (a,b) \times (0,\infty)$ et $\Phi(\partial\Omega_f) = (a,b) \times \{0\}$. Expliciter l'inverse de Φ et montrer qu'elle est de classe C^k.

Exercice 2 (Examen 2016) Montrer que $H^m(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$ si $m > d/2$.

Exercice 3 (Une inégalité de Sobolev dans $\mathbb{R}^2$)
Pour $p > 2$ il existe une $C > 0$ tel que

$$\max_{x\in\mathbb{R}^2} |u(x)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^2)}. \tag{1}$$

a) Justifier qu'il suffit de montrer (1) pour $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ et pour $u(0)$ coté gauche au lieu du maximum.
b) Soit $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau avec $0 \leq \eta \leq 1$ puis $\eta = 1$ sur $[0, 1/2]$ puis $\eta(x) = 0$ pour $x \geq 3/4$. Soit $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que

$$u(0) = -\int_0^\infty \tfrac{d}{dr}\left(v(r,\theta)\eta(r)\right)\, dr$$

c) Intégrer sur $\theta \in [0, 2\pi]$ et diviser par 2π pour obtenir (observer: $r\,dr$!)

$$u(0) = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{-1}\tfrac{d}{dr}\left(u(r\cos\theta, r\sin\theta)\eta(r)\right)\ r\,dr.$$

d) Transformer en intégrale sur $B(0,1)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Utiliser l'inégalité de Hölder pour produire une intégrale ne contenant que u (et η) et leurs dérivées partielles, et une autre, ne dépendant que de $r = \|x\|$. Déduire que $|u(0)| \lesssim \|u\|_{W^{1,2}}$ si $p > 2$.
e) Soit $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)^{1/3}$. Montrer que $f \in W^{1,2}(B(0, 1/2)) = H^1(B(0, 1/2))$. Que conclure sur (1) dans le cas limite $p = 2$?
e*) Adapter la preuve pour montrer que $W^{k,p}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$ si $kp > 2$ en effectuant des IPP en (b).

Exercice 4 Soit $\alpha \in (0,1)$ fixé et $\beta > 0$, soit $\Omega_\alpha = \{(x,y) \in Q : \quad y > x^\alpha\}$.
a) Montrer que $u(x,y) = y^{-\beta}$ est dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega_\alpha)$ ssi $1 + \frac{1}{\alpha} > p(1+\beta)$.
b) Soit $2 < p < 1 + \frac{1}{\alpha}$ et β choisi suffisemment petit pour que la condition de (b) soit satisfaite. La fonction $u \in W^{1,p}(\Omega_\alpha)$, admet-elle une extension à $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$? Indication: que dit l'exercice précédente?
c) Conclusion sur la régularité de Ω_α? Est-ce que cette construction reste valable si $\alpha = 1$?

Exercice 5 (DS 2017)

a) Rappeler le théorème de compacité de Rellich.

b) Soit $I_n = (2^{-n-1}, 2^{-n})$, $u_n = 2^{n/2}\mathbb{1}_{I_n}$ et $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} I_n$.

  i) Calculer $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$.

  ii) Montrer $u_n \in H^1(\Omega)$ pour tout n.

  iii) Donner un argument abstrait qui montre que (u_n) admet une sous-suite extraite faiblement convergente dans $H^1(\Omega)$.

  iv) Utiliser $\langle f|u_n\rangle = \langle f\mathbb{1}_{I_n}|u_n\rangle$ pour montrer que u_n converge faiblement vers $u = 0$.

  v) L'injection $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est elle continue? compacte? Que déduire sur la régularité de Ω?

Exercice 6

a) Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in K(X, Y)$. Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x, alors (Tx_n) converge (en norme) vers Tx.

b) Soit Ω un ouvert borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit $\langle f\rangle_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,dx$ la moyenne de f sur Ω. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $f \in H^1(\Omega)$,

$$\left\|f - \langle f\rangle_\Omega\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2}$$

Indications: effectuer un raisonnement par l'absurde : si l'inégalité est fausse, il existe une suite de fonctions $f_n \in H^1$ tel qu'on ait $\left\|f_n - \langle f_n\rangle_\Omega\right\|_{L_2} > n\|\nabla f_n\|_{L^2}$, pour tout n.

  i) Construire une suite de fonctions (g_n) tel que g_n est à moyenne nulle, de norme L^2 constant à un, et que $\|\nabla g_n\| \leq \frac{1}{n}$.

  ii) Montrer qu'il existe une sous-suite extraite $(g_{\sigma(n)})$ qui converge dans H^1 faiblement vers une limite, appelons la g.

  iii) Montrer par (a) qu'on peut supposer que $(g_{\sigma(n)})$ converge vers g en norme $L^2(\Omega)$.

  iv) En déduire la norme et la moyenne de g.

  v) Montrer que $\nabla g = 0$, puis trouver une contradiction.

c) Montrer par un contre-exemple que (2) n'est pas vraie si Ω n'est pas supposé connexe.

Exercice 7 Soit $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Considérons

$$\begin{cases} -\Delta u - \alpha|u|^{\beta-1}u = 0 & \text{pour} \quad x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

Montrer qu'il existe une solution non-triviale $u \in H_0^1(\Omega)$. On introduit pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$F_\beta(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{\beta+1}\int_\Omega |u|^{\beta+1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

a) Montrer que l'inclusion $\iota : L^2(\Omega) \to L^{\beta+1}(\Omega)$, $\iota(f) = f$ est continue.

b) Montrer que $F_\beta(u) \to +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1} \to +\infty$. Indication: utiliser l'inégalité de Poincaré, et, dans un premier temps, considérer $F(tu)$ quand $t \to +\infty$.

c) Montrer qu'il existe une suite bornée $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} F_\beta(u_n) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} F_\beta(u)$$

d) Justifier que (u_n) admet une sous-suite faiblement convergente.

e) Quitte à passer à cette sous-suite, on peut supposer que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$. Montrer qu'alors $\|u_n - u\|_{L^{\beta+1}} \to 0$. (indication: Rellich).

f) Utiliser $\|u\|_{H_0^1}^2 = \lim_n \langle u, u_n\rangle$ pour montrer que

$$F_\beta(u) \le \liminf F_\beta(u_n) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} F_\beta(u)$$

g) Soit $0 \ne h \in H_0^1(\Omega)$. Justifier que $\phi(t) = F_\beta(u+th) - F_\beta(u)$ admet un minium en $t = 0$. Justifier que si la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{F_\beta(u+th) - F_\beta(u)}{t}$$

existe, alors elle est nulle.

h) Montrer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F_\beta(u+th) - F_\beta(u)}{t} = \int_\Omega \nabla u \nabla h - \alpha \int_\Omega |u|^{\beta-1} uh.$$

En déduire que u est la solution variationnelle de (P)

i) Reste à montrer que u est non-trivial: Soit $0 \ne w \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $F_\beta(tw) < 0$ pour un $t > 0$ suffisemment petit (exploiter $\beta + 1 < 2$). En déduire que $u \ne 0$.

Exercice 8 Soit H un espace de Hilbert et $\mathfrak{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ une application sesquilinéaire satisfaisant $\mathfrak{a}(x,y) \le M\|x\|\|y\|$ et $\mathrm{Re}\mathfrak{a}(x,x) \ge m\|x\|^2$.

a) Montrer que pour tout $u \in H$ il existe $w \in H$ tel qu'on ait pour tout $v \in H$ $\mathfrak{a}(v,u) = \langle v|w\rangle_H$.

b) Soit $Au := w$. Montrer que A est linéaire, puis considérer $\|Au\|^2 = \mathfrak{a}(Au,u)$ pour montrer que A est continu.

c) Utilisez $\mathrm{Re}\mathfrak{a}(x,x) \ge m\|x\|^2$ pour montrer que $\|Au\| \ge m\|u\|$. En déduire que A est injectif et à image fermé (indication: utilisez la complétude de H).

d) Montrer que l'image de A est dense : supposons existe un $w \perp \mathrm{Image}(A)$.Montrez que $w = 0$.

e) Ainsi, A est linéaire, continu, bijectif. Montrer que $A^{-1} \in \mathscr{L}(H)$.

f) Soit $L : H \to \mathbb{R}$ linéaire et continu. Montrer qu'il existe $u \in H$ tel qu'on a égalié entre les applications $v \mapsto \mathfrak{a}(u,v)$ et L.

Exercice 9 On veut résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{3}$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R})$. Une solution classique est une solution $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant (3). On dira que $u \in H^1(\mathbb{R})$ est une solution faible de (3) si

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}) : \qquad \int_\mathbb{R} u'v' + \int_\mathbb{R} uv = \int_\mathbb{R} fv.$$

a) Soit $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ une "fonction plateau" à support dans $[-2,2]$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta|_{[-1,1]} = 1$. On définit la suite $\eta_k(x) = \eta(\frac{x}{k})$. Montrer que si $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\eta_k g \to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

b) Soit u une solution classique de (3). Multiplier l'équation différentielle par $u \cdot \eta_k$ et intégrer pour montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$. Montrer ensuite que u est aussi une solution faible de (3).

c) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible à (3).

d) On suppose que f est continue. Montrer alors que la solution faible de (3) est dans $C^2(\mathbb{R})$. Conclure.

Exercice 10 Soit Ω un ouvert borné régulier. Si u et v sont dans $H^1(\Omega)$, on pose :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \left(\int_\Omega u\right)\left(\int_\Omega v\right).$$

a) Montrer que a est bilinéaire, continue et elliptique sur $H^1(\Omega)$.

b) Montrer que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe un et un seul u solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \;\; a(u,v) = \int_\Omega fv.$$

Montrer qu'alors $\int_\Omega u = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_\Omega f$.

c) Dans le cas où $\int_\Omega f = 0$, quelle est l'EDP vérifiée par u ?