Année Universitaire 2020 / 2021
Licence 2

Examen: Fonctions de plusieurs variables
Durée : 3h00

Collège Sciences et technologies

Ni documents, ni équipements électroniques ne sont autorisés.

Veuillez preter une attention particulière à bien justifier vos réponses.

Écrire lisiblement votre numéro d'anonymat (à défaut: numéro étudiant) sur toutes les feuilles et intercalaires.

Question 1 **(Question de cours)** Soit $n, m > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction.

(a) Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le domaine de définition Ω de f est ouvert pour le reste de l'exercice.
(b) Donner la définition **et** une caractérisation équivalente d'un compact de $\mathbb{R}^n$.
(c) Donner la définition (ou une caractérisation équivalente) de la continuité de f.
(d) Soit K un compact inclus dans Ω et f continue. Montrer que $f(K)$ est compact.
(e) Expliquer la différence entre "f est différentiable" et "f est de classe $\mathcal{C}^1$": une explication rigoureuse est demandée, mais ni preuves, ni contre-exemples ne sont exigés.

Question 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) La fonction f, est elle continue? différentiable? de classe C^1?
(b) Est-ce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

existe? Est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?
(c) Calculer la matrice Hessienne de f en $(0,0)$.

Question 3 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(tx) = t^p f(x)$$

Montrer que $D_f(x)(x) = \mathcal{J}_f(x).x = pf(x)$. *Indication: fixer $x \in \mathbb{R}^n$ et calculer $h'(1)$ pour $h(t) = f(tx)$.*

TOURNER LA PAGE, S.V.P.

Question 4 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sont continues sur $\mathbb{R}^3$. On suppose que f a 3 points critiques, que l'on note a, b, c. On note les matrices Hessiennes respectives de f au point a par A, celle au point b par B et celle au point c par C. Les voici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Est-ce que f admet des extréma locaux? Si oui, en quels points?

$\boxed{A}$ · $3 > 0$ et $\det(A) = -1$.

· $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ les signs $(+,-,-)$ → point selle.

Question 5 Soit $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$. Calculer le polynôme de Taylor ordre 2 de f autour du point $(1, -2) \in \mathbb{R}^2$. Que peut-on dire du reste?

$\boxed{B}$ $3 > 0$, $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $\det B = 41 > 0$. signs $(+,+,+)$ → min local.

Question 6 On considère le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + 3y + z^3 - z & = & 7 \\ 2x + 2y + \cos(xz) & = & 7 \end{cases}$$

$\boxed{C}$ $-1 < 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0$

(a) Montrer que $(1, 2, 0)$ en est une solution.

(b) Parmi les couples de variables (x, y), (x, z) et (y, z), quels sont ceux qu'on peut localement (autour de $(1, 2, 0)$) écrire comme fonction de classe C^1 de la troisième variable?

et $\det C = -1 < 0$

signs $(-,+,-)$ → max. local.

Question 7 On considère la fonction

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \text{définie par} \qquad F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^2 \\ x^3 y^3 \end{pmatrix}.$$

et les deux projections

$$\pi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & z \end{cases}$$

(a) Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U, V de $(1, 1)$ telles que $h = \pi_1 \circ F : U \to V$ est bijective, et que h^{-1} est de classe C^1.

(b) Soit $g := \pi_2 \circ F \circ h^{-1}$. Montrer que l'image de U par F est le graphe de g sur V.
Remarque: il n'est pas demandé d'expliciter g !

— FIN —

Ex 2 $\quad f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \ (*) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On voit que $|x^2-y^2| \leq |x|^2 + |y|^2 = x^2+y^2$, donc $(*) \leq 1$. Il suit que

$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \leq |r^2 \cos\varphi \sin\varphi| \leq r^2$. Ainsi, f est cont. $/ \mathbb{R}^2$.

Dériv. Comme quotient de polynômes, avec un dénominateur $\neq 0$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Par coord. polaires, on voit,

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \leq r + \frac{4r^5}{r^4} = 5r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Puisque $f(y,x) = -f(x,y)$ il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

OR $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\nabla f)(x,y)$ existe et $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

on a bien $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

$\boxed{Q : C^2 ?}$ On calcule en dehors de $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8xy^3(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^3 \cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$$

observons que les degrés des polynômes sont $\frac{4}{4}$ pour le 1er terme et $\frac{8}{8}$ pour le 2ième. Dans ce cas, en général, la limite n'ex. pas (heuristique!)

Montrons le :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y) = 0 \quad \forall y \neq 0 \text{ avec limite } = 0 \text{ quand } y \to 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,t) = \frac{4}{4} + \frac{16}{4} = 5 \text{ indép. de } t.$$

Il suit que $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)$ n'admet pas de limite en $(0,0)$. $\Rightarrow f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$.

Hessienne.

Il faut calculer

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ "à la main."

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

de même pour $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

Par contre,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

mais

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim \frac{+h}{h} = +1$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rem: Le manque de symétrie montre $f \notin C^2$ par contraposée du thm. de Schwarz!

Q3 $\quad f(tx) = t^p f(x)$. Soit x fixé.

$h(t) = f(tx)$. D'un coté, $h'(t) = p\, t^{p-1} \cdot f(x)$

mais de l'autre, $h'(t) = D_f(tx) \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{dt}(tx)\right)}_{=x}$

Il suit (en posant $t=1$) que

$$\underbrace{J_f(x) \cdot x}_{= D_f(tx)(x)\big|_{t=1}} = p \cdot f(x).$$

$\boxtimes$

Q4 On applique le critère de Hurwitz (cours). Voir en haut.

Q5 $f(x,y) = \sqrt{2x-y}$. $a = (1,-2)$.

f est $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisin. de a!

$f(a) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2x-y}}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{2}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{2x-y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = -\frac{1}{4}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{-1}{(2x-y)^{3/2}}$; $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \frac{-1}{8}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{2(2x-y)^{3/2}}$; $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{1}{16}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{4(2x-y)^{3/2}}$; $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = \frac{-1}{32}$.

Donc

$$f(1+h, -2+k) = 2 + \frac{h}{2} - \frac{k}{4} + \frac{1}{2}\left\{ \frac{-h^2}{8} + \frac{2hk}{16} - \frac{k^2}{32} \right\} + r(h,k)$$

et puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans un vois. de a, on a

$$\frac{r(h,k)}{h^2+k^2} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0.$$

$\boxed{\text{E}}$

Q6 (a) trivial.

(b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+3y+z^3-z-7 \\ 2x+2y+\cos(xz)-7 \end{pmatrix}$

Applicons le thm des fonct. impl def.! D'abord, $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 3 & 3z^2-1 \\ 2-z\cdot\sin(xz) & 2 & -x\cdot\sin(xz) \end{pmatrix}$$

au point $(1,2,0)$ on a

$$J_f(1,2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

. observons que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\rightsquigarrow$ (x,y) s'écrit loc^t comme fonct de z

. observons $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightsquigarrow (x,z)$ s'écrit loc^t en fonct de y

et $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightsquigarrow (y,z)$ s'écrit loc^t comme fonct de z.

Q7 (a) $h(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^2 \end{pmatrix}$. h est C^∞!

$$J_h(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

$$J_h(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(J_f(1,1)) \neq 0.$$

$\Rightarrow$ (thm. de l'inv. locale) $\exists\ U, V$ vois. de $(1,1)$ et de $h(1,1) = (1,1)$ respect^t t.q. $h|_U : U \to V$ bijectif.

De plus, $h^{-1} : V \to U$ est de classe C^1.

(b). $F = (\pi_1 \circ F, \pi_2 \circ F)$!

ainsi, $F(h^{-1}(x))$

$$= \Big((\pi_1 \circ F)\underbrace{(\pi_1 \circ F)^{-1}}_{h^{-1}}(x),\ (\pi_2 \circ F \circ h^{-1})(x) \Big)$$

$$= (x,\ g(x)) \quad \text{pour } x \in V.$$

On voit que $F(U) = F(h^{-1}(V))$ est un graphe, c'est de la forme

$$\{ (x, g(x)) : x \in V \}\ ! \quad \blacksquare$$

~ fin ~