Remarques générales

Le barème est sur 21 points, dont 11 points en équations différentielles: Il y a 9 points d'exercices calculatoires annoncées (!) sur les équations différentielles. En plus, 2 points de questions de cours simples.
La partie "calcul différentielles"était sur 10 points, qui testaient, délibérément, un peu plus la compréhension: c'est une deuxième lecture du sujet (après "fonctions de plusieurs variables"). Cela dit, avec la question de cours (Q1) et l' exercice calculatoire (Q2), 4.5 points portant sur des sujets qui avaient étés vus à l'identique en TD, et (2.5P) calculatoires de la (Q3) qui nécissitaient plus de reflexion sur les liens entre les objets, sans quitter les chemins connus de beaucoup.
Vu cette construction du sujet, je ne peux pas comprendre la moyenne, qui est de 5,81. Je propose en bas après la correction une statistique "exercice par exercice". L'expression "non" veut dire : "non entamé" que je distingue de "essayé mais 0 points obtenus".

Question 1 *(Barème : 1.5 points).* Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction.

(a) Rappeler la définition de la différentiabilité de F.

(b) Supposons dans cette question que $\Omega = \mathbb{R}^n$ et que

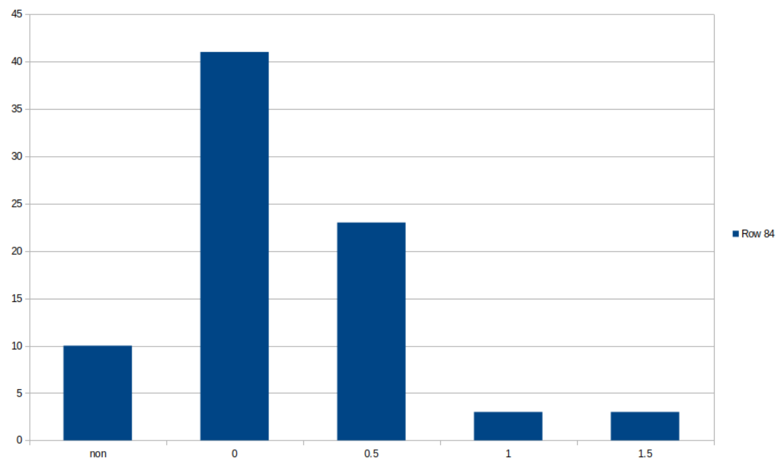
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \qquad \|F(x) - F(y)\| \leq 42\|x - y\|^{3/2}.$$

Montrer que F est nécessairement constante.

(a) Question de cours.(0.5P) (b) On voit que l'application nulle, $L : x \mapsto 0$ est linéaire et que

$$\|F(x+h) - F(x) - L(h)\| \leq 42\|x - y\|^{3/2}$$

Il suit que F est différentiable en tout point, et que $dF = 0$. Par conséquent (inégalité des accroissements finis), F est une fonction constante. (1P)



La question (a), pourtant **la** définition à retenir, posait beaucoup de problèmes. La moitié (!) des copies est resté à 0 points sur cette question, ce qui est inexplicable.

Question 2 *(Barème : 3 points).* Vérifier que la relation $e^{xy} + y^2 - 3y + 2x = -1$ définit y comme fonction de x sur un voisinage de $(0, 1)$. Montrer que cette fonction admet un développement limité à tout ordre au voisinage de $x = 0$. Calculer ce développement limité à l'ordre 2. On observe que $x = 0, y = 1$ satisfait la relation donnée. Soit $f(x, y) = e^{xy} + y^2 - 3y + 2x$.

$$J_f = (ye^{xy} + 2, xe^{xy} + 2y - 3)$$

(0.5 Point). $J_f(0, 1) = (3, -1)$. Or f est une fonction de classe C^∞ et $f_y(0, 1) \neq 0$, le thm des fonctions implicitement définis assure que y est localement une fonction de x. De plus, y est de classe C^∞ car f l'est. (0.5 point) Or

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_f(x, y(x)).(1, y'(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ye^{xy} + 2 + y'(xe^{xy} + 2y - 3) = 0$$

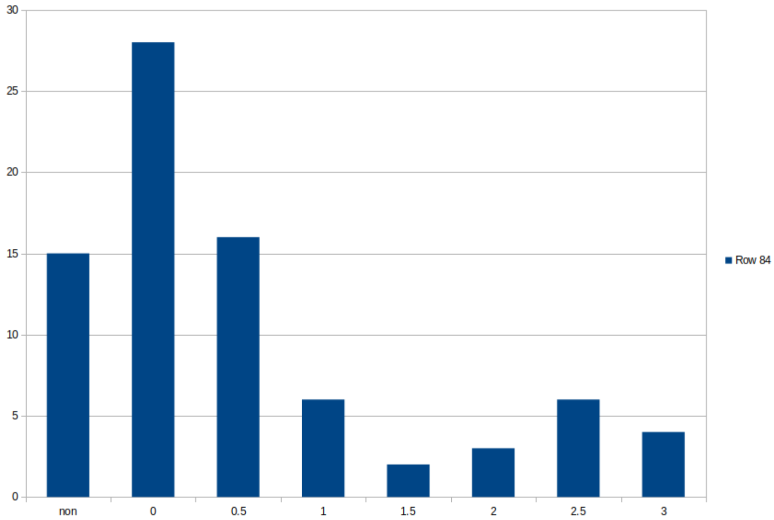
En évaluant en $x=0$: on a $y'(0)=3$ (0.5 point) puis, si on re-dérive,

$ye^{xy}+2+y'(xe^{xy}+2y-3)=0 \quad \Rightarrow \quad (y'+y(y+xy'))e^{xy}+y''.(x\,e^{xy}+2y-3)+y'.((1+x(xy'+y))e^{xy}+2y')=0$

(0.5 points) de qui on déduit $y''(0)=25$. (0.5 point) Avec ces informations on déduit

$$y(x)=1+3x+\tfrac{25}{2}x^2+O(x^3)$$

proche de 0 par la formule de Taylor. (0.5 points). Rem: si on continue ce jeu, on trouve $\frac{272}{3}x^3$ puis $\frac{19427}{24}x^4$ comme prochains termes du développement...

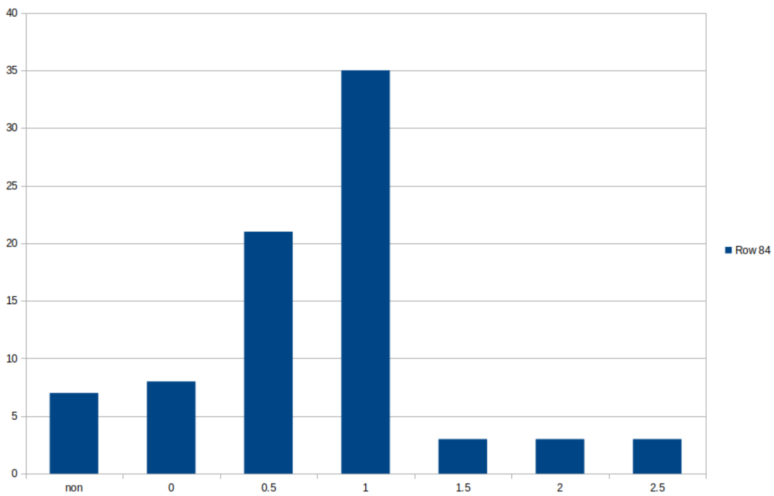


Il y avait souvent confusion entre la fonction f et la fonction implicite y: à la place de l'exercice demandé, le polynôme de Taylor de f a été calculé! C'était peut-être une formulation maladroite de dire "cette fonction" pour faire référence à (la seule!) fonction y, car f a été appelé "relation" justement pour éviter des ambiguïtés ... en vain.

Question 3 *(Barème : 2.5 points).* Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de classe C^1 et $a\in\mathbb{R}^2$ fixé. Supposons que pour

$$v:=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w:=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad \text{on ait} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(a)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial w}(a)=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

Justifier que f est inversible dans un voisinage de $f(a)$ et déterminer la matrice Jacobienne de f^{-1} au point $f(a)$.

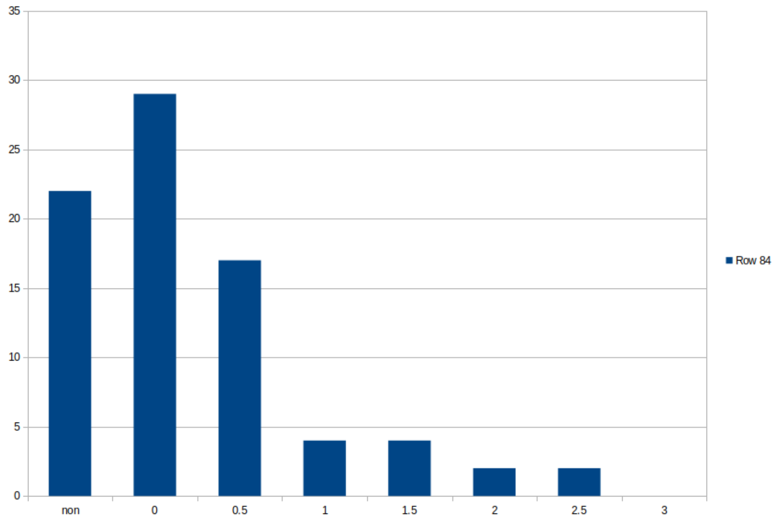


Soit $A = J_f(a)$. Par hypothèse, $Av = x$ et $Aw = y$. Observons que $\{v, w\}$ et $\{x, y\}$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$ (0.5 Point). Donc: A est inversible! (0.5P) Or f est C^1, par le thm. d'inversion locale, f admet une inverse .. locale (0.5P). De plus, on sait que

$$J_{f-1}(f(a)) = (J_f(a))^{-1} = A^{-1}$$

(0.5P) qui est ici donnée par la matrice $\left(\frac{1}{2}v \vdots \frac{1}{3}w\right)$ (écriture par colonnes): en effet, si e_i est le repère standard de $\mathbb{R}^2$, alors $A^{-1}e_i$ est la i-ième colonne de la matrice A^{-1}. Mais $e_1 = \frac{1}{2}x$ et $A^{-1}x = v$, puis $e_2 = \frac{1}{3}y$ et $A^{-1}y = w$. (0.5P)
Cet exercice était pour tester les connexions entre les différents objets. L'erreur la plus fréquente était de prendre la matrice $B = (x \vdots y)$ à la place de J_f. Si le reste était bien fait il y avait toujours 1P a gagner – ce qui explique le peak à 1P dans le diagramme.

Question 4 *(Barème : 3 points).*



Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un ouvert, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction et $(t_0, y_0) \in \Omega$.

(a) Expliciter des hypothèses sur la fonction F qui garantissent l'existence d'un intervalle ouvert I et d'un ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$ satisfaisant $(t_0, y_0) \in I \times V \subset \Omega$ ainsi que l'existence d'une fonction (implicitement définie) $y : I \to V$ de classe C^1 telle que

$$(\star\star) \qquad \forall t \in I : \qquad F(t, y(t)) = F(t_0, y_0).$$

(b) Dériver $(\star\star)$ par rapport à t pour établir une équation différentielle pour y.

(c) Montrer, sous les mêmes hypothèses que vous avez donné dans le point (a), l'existence d'une solution y à l'équation obtenue en (b) sans recours au théorème des fonctions implicitement définies (il n'est pas demandé de discuter l'unicité de la solution).

(d) Montrer ensuite que la solution y de l'équation différentielle obtenue en (c) satisfait $(\star\star)$.

(a) Thm des fonctions implicitement définies. (0.5P) (b) $(\star\star)$ nous dit que la fonction $t \mapsto F(t, y(t))$ est constante, donc sa dérivée est nulle. Si on note F_t la dérivée partielle de F par rapport à t (un vecteur en colonne) et par si on note F_y la Jacobienne de F par rapport à $y_1, ..y_d$ (une matrice $d \times d$), il suit que (0.5P)

$$F_t(t, y(t)) + F_y(t, y(t)).y'(t) = 0 \qquad (I)$$

Supposons F de classe C^1 et F_y inversible en (t_0, y_0). Alors par continuité, $F_y(t, y(t))$ est inversible dans un voisinage de ce point (0.5P): en effet, $\det(F(t, y(t)))$ ne s'annule pas en t_0 et c'est une fonction continue!. Il suit que y satisfait l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)) := -F_y(t, y(t))^{-1}.F_t(t, y(t))$$

où f est continu car F est C^1 par hypothèse (0.5P). Par le théorème de Peano, il existe une solution maximale satisfaisant $y(t_0) = y_0$. (0.5P) (c) Cette solution satisfait donc que $d/dtF(t, y(t)) = 0$ à l'effet que $F(t, y(t))$ est constante, donc égale à $F(t_0, y_0)$. (0.5P)
Rem: dans ce cas particulier, le théorème de Peano implique donc le thm de fonctions implicitement définis, et inversement, l'existence de solutions de l'équation différentielles "implicite" (I) est assuré par ce dernier théorème. Joli lien entre les deux parties du cours.
De façon surprenante, la plus fréquente erreur était de faussement calculer la dérivée de la composée $t \mapsto F(t, y(t))$. Dommage, car nous avons travaillé ceci en TD et dans deux DM's!

Question 5 *(Barème : 2 points).*

(a) Réécrire

$$y'''(t) = t\, y''(t) + y(t)\,(y'(t))^2, \qquad y(0) = e, y'(0) = 0, y''(0) = 0$$

en une équation d'ordre 1 (on ne demande pas de résoudre cette équation). L'équation est d'ordre 3. On écrit donc par exemple

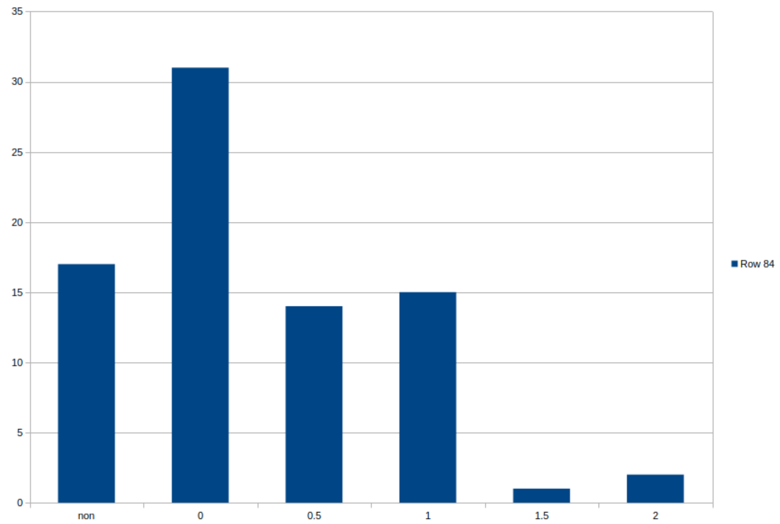
$$Z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(t, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ c \\ tc + ab^2 \end{pmatrix}$$

puis observe que l'équation se réécrit en $Z' = F(t, Z)$. (0.5P)

(b) Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues qui satisfont

$$\forall t \in \mathbb{R} : \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, \mathrm{d}s$$

Justifier que y est de classe C^1. Quelle équation différentielle satisfait y? Supposons y continue. Alors $s \mapsto f(s, y(s))$ est continue (0.5P), et donc sa primitive de classe C^1. Il suit que $y(t) - y_0$ est C^1 et donc aussi $y(t)$. (0.5P) Rem: cet argument apparaît dans la preuve du thm de Peano.



Deux questions de cours indépendants. Dans la (a), le problème est non-linéaire, mais cela n'a pas empêché de vouloir l'écrire sous la forme $Z' = A.Z$ avec une matrice ... au lieu de $Z' = F(t, Z)$. Erreur très fréquente. Dans la (b), l'erreur la plus fréquente était d'affirmer $\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(s), ds\right) = f(t) - f(a)$ au lieu de $= f(t)$.

Question 6 *(Barème : $2.5 + 2.5$ points).*

(a) Soit $|\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$. Résoudre

$$y'(t) = \cos^2(y(t)), \qquad y(0) = \lambda.$$

Justifier l'unicité de la solution. Observons que l'équation est de la forme $y' = g(y)$ avec g de classe C^∞. On a donc existence et unicité du problème de Cauchy. (0.5P)
Pour $|\lambda| = \pi/2$, on observe que des solutions constantes sont des solutions (et donc les seules!). (0.5P)
Pour $|\lambda| < \pi/2$, il s'agit d'un problème à variables séparées, et $g(0) \neq 0$. Ce qui permet d'utiliser la méthode de séparation de variables: formellement,

$$\frac{dy}{\cos^2(y)} = 1dt$$

Or, $\frac{1}{\cos^2(y)}$ a pour primitive la fonction $\tan(y)$, la solution est de la forme $y(t) = \arctan(c+t)$ avec c à déterminer. (0.5P) On re-dérive cette fonction pour s'assurer d'avoir bien trouvé une solution. La valeur de c est déterminé par λ: en effet, $c = \tan(\lambda)$ (qui est fini grâce à l'hypothèse $|\lambda| < \pi/2$).(0.5P).

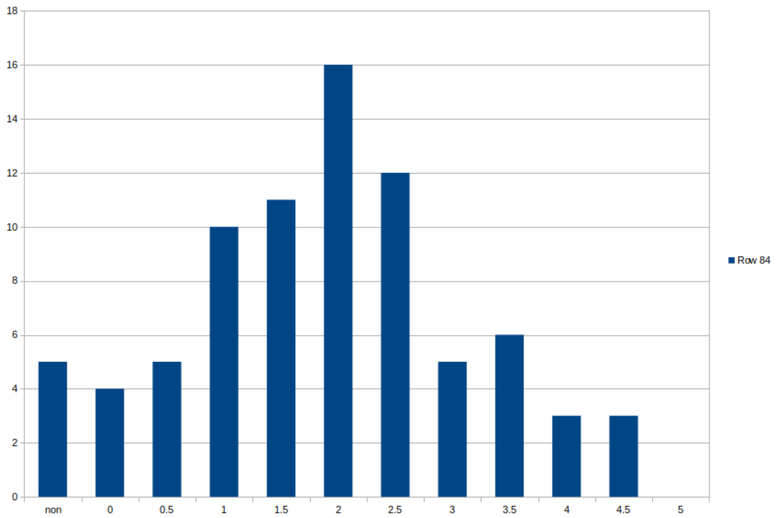
(b) Résoudre

$$y'(t) = 2t\, y(t) + t^3 \qquad y(1) = 0.$$

Justifier l'unicité de la solution. Le problème est linéaire avec second membre. Les fonctions $a(t) = 2t, b(t) = t^3$ sont continues, on a donc existence & unicité de solutions. (0.5 P) $y_h(t) = \exp(t^2)$ est immédiat (0.5P). Ensuite, variation de la constante amène à étudier $c'(t) = b(t)/y_h(t) = t^3 \exp(-t^2) = t\ t^2 \exp(-t^2)$. (0.5P) Par un changement de variables ($u = t^2$) la primitive est $\frac{1}{2}\int u \exp(-u) = \frac{1}{2}(-1-u)e^{-u}$. et donc $c(t) = -\frac{1}{2}(1+t^2)\exp(-t^2)$. Il suit que $y_p(t) = -\frac{1}{2}(1+t^2)$. (0.5P) Toutes les solutions sont donc

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}(1+t^2) + \lambda e^{t^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}(0.5P)$$

La valeur initiale est $y(0) = -1 + \lambda \exp(1) = 0$ ce qui donne l'unique solution en calculant $\lambda = \frac{1}{e}$. (0.5P).



Deux questions (sep. de var. & var. de la constante) **annoncées**, et visiblement peu préparées. Que dire? Dans la (a), les solutions constantes n'ont pas été trouvés par un seul étudiant! À la place, il était affirmé que $\tan(\pi/2) < \infty$... La question (b) est, généralement, mieux réussi.

Question 7 *(Barème : 2 points).* Donner toutes les solutions de $y' = Ay$ où

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \text{Soit} \quad v = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pourra utiliser, sans le démontrer, que v est le seul vecteur propre de A. Le problème est lin. à coeff. const. dans $\mathbb{R}^3$: L'espace des solutions est un esp. vectoriel de dimension $n = 3$ (thm du cours) (0.5 P). Trouvons lui une base (= syst. fondamental). On observe par l'indication que $\lambda = 2$. On a donc $\varphi_1(t) = e^{2t}v$.
L'équation $(A-2)w = v$ donne $w = (1,0,0)$ ou $Aw = v+2w$). On a donc $\varphi_2(t) = \exp(2t)(tv+w)$. (0.5p)
L'équation $(A-2)z = w$ donne $z = (3,-1,0)$ ou $Az = w+2z$). On a donc $\varphi_3(t) = \exp(2t)(\frac{t^2}{2}v + tw + z)$. (0.5p)
Ces 3 solutions sont indépendants en $t = 0$ donc en tout t et dans $C(\mathbb{R};\mathbb{R}^3)$: un système fondamental est

$$\{\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \varphi_3(t)\} \qquad (0.5P)$$

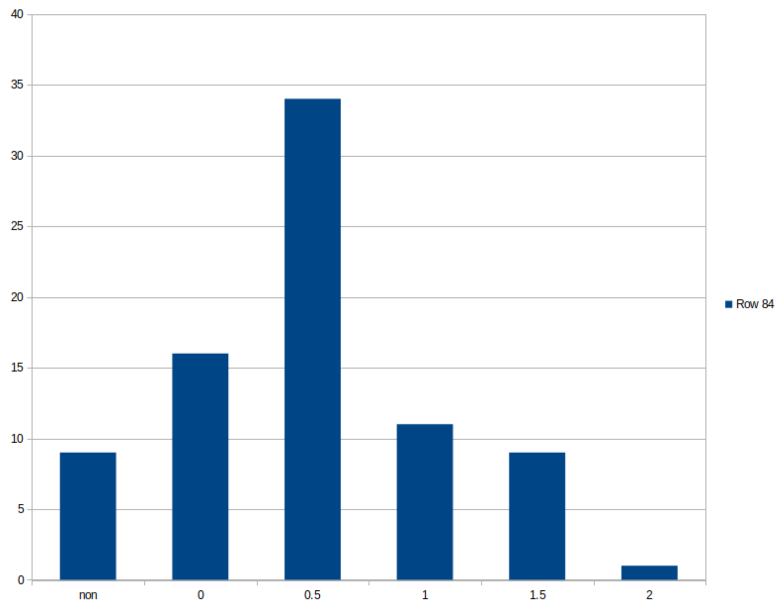
Solution alternative:

$$N = A - 2I = \begin{pmatrix} 5 & 14 & -3 \\ -2 & -6 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent (en utilisant la commutation de $2I$ et N)

$$\exp(t.A) = \exp(t.(2I+N)) = e^{2t}\exp(tN) = e^{2t}(I+tN+t^2N^2/2) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+5t & 14t-5t^2/2 & -3t+5t^2 \\ -2t & 1-6t+t^2 & 2t-2t^2 \\ -t & -3t+t^2/2 & 1+t-t^2 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de cette matrice donnent un autre système fondamental.



Encore une question **annoncée**, et visiblement peu préparée. Souvent, 10-15 min étaient gaspillés par un calcul de polynôme caracteristique, au lieu d'observer que $A.v = 2.v$. Autres erreurs fréquents étaient de ne pas savoir calculer $\varphi_{2,3}$. (L'oubli du facteur 1/2 dans φ_3 n'a pas été sanctionné).

Question 8 *(Barème : 2 points).* Déterminer toutes les solutions de

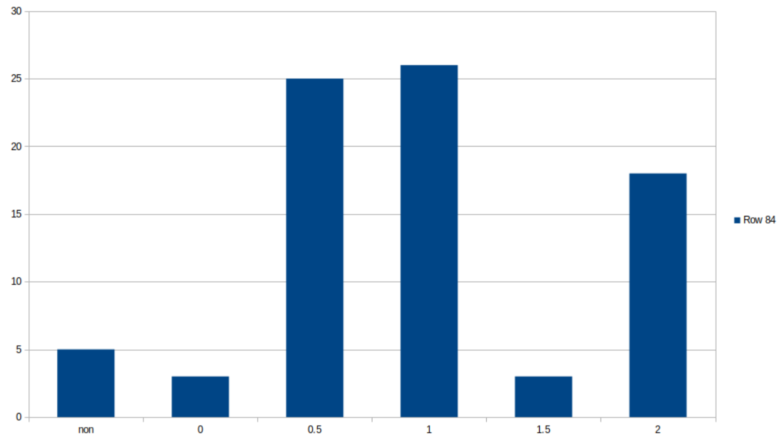
$$y'' + 3y' - 10y = 42\,t\,e^{2t}.$$

Le polynôme caractéristique $p(x) = x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$ a les racines $2, -5$. Il suit qu'on a 2 solutions homogènes $y_1(t) = e^{2t}$, $y_2(t) = e^{-5t}$ (0.5P). Le second membre est de la forme

$p(t)\exp(\omega t)$ avec $p(2) = 0$ (le cas résonnant). On poursuit le Ansatz: $y_p(t) = t(at+b)e^{2t}$ (0.5P). Par calcul simple (dériver & injecter), $a = 3, b = -6/7$: (0.5P)
Par les résultats du cours, toutes les solutions sont de la forme $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ où y_p est une solution particulière, et y_h une solution homogène. L'espace des solution homogènes pour un problème d'ordre deux est deux, ce qui veut dire que toute solution est de la forme

$$y(t) = \alpha e^{-5t} + (3t^2 - \tfrac{6}{7}t + \beta)e^{2t}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (0.5P).



Encore une question **annoncée**, et visiblement peu préparée. Lecture schématique du diagramme
0.5P: seulement les solutions homogènes sont données.
1P: solutions homogènes données et structure des solutions expliqué.
2P: la solution particulière trouvé.