

### Tribus et Mesures (suite)

#### Exercice 1

Est-ce que la tribu de Borel est engendrée par les singletons ; les intervalles de la forme  $(a, +\infty)$  ; les intervalles fermés ?

#### Exercice 2

L'ensemble suivant est-il un élément de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  la tribu des boréliens de  $\mathbb{R}^2$  ?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 < 1 \text{ et } \ln(x^2 + y^2 + 1) \geq 2\}.$$

#### Exercice 3

Soit  $(A_n)$  une suite de parties de  $\Omega$ . Dans cet exercice on note

$$\overline{(A_n)} = \bigcap_n \left( \bigcup_{k \geq n} A_k \right) \quad \text{et} \quad \underline{(A_n)} = \bigcup_n \left( \bigcap_{k \geq n} A_k \right).$$

1. Montrer que  $x \in \overline{(A_n)}$  si et seulement si  $x \in A_k$  pour une infinité d'indices  $k$  ; que  $x \in \underline{(A_n)}$  si et seulement si  $x$  appartient à tous les  $A_k$  sauf peut-être un nombre fini.
2. Soit  $\Omega$  un ensemble et  $(A_n)$  une suite de parties de  $\Omega$ . Déterminer  $\overline{(A_n)}$  et  $\underline{(A_n)}$  dans les cas
  - $(A_n)$  est monotone (par rapport à l'ordre partiel d'inclusion),
  - $A_{2n} = B$  et  $A_{2n+1} = C$  où  $B, C$  sont deux parties de  $\Omega$ ,
  - les  $A_n$  sont deux à deux disjoints.
3. Dans la suite de l'exercice on suppose que l'on a un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  et que pour tout entier  $n$ ,  $A_n \in \mathcal{T}$ . Justifier que  $\overline{(A_n)}$  et  $\underline{(A_n)}$  sont dans  $\mathcal{T}$ .
4. Montrer que  $\mu(\underline{(A_n)}) \leq \liminf \mu(A_n)$  ("propriété de Fatou").
5. On suppose de plus qu'il existe  $B$  dans  $\mathcal{T}$  tel que  $\mu(B) < +\infty$  et pour tout entier  $n$ ,  $A_n \subset B$  (donner un exemple de mesure pour laquelle cette condition est toujours vérifiée). Montrer que  $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\overline{(A_n)})$ .
6. Montrer que si l'on suppose à la fois qu'il existe  $B$  dans  $\mathcal{T}$  tel que  $\mu(B) < +\infty$  et pour tout entier  $n$ ,  $A_n \subset B$  et que  $\underline{(A_n)} = \overline{(A_n)}$  alors la suite  $\mu(A_n)$  converge vers  $\mu(\overline{(A_n)})$ .

#### Exercice 4

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. On considère une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  telle que  $\sum_{n \geq 0} \mu(A_n) < +\infty$ . On définit  $\overline{(A_n)}$  comme dans l'exercice 2. Montrer que  $\mu(\overline{(A_n)}) = 0$ . Qu'en déduit-on pour presque tout  $x$  de  $X$  ?

#### Exercice 5 Structure borélienne des points de continuité d'une fonction

Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application quelconque. On note  $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$  et on définit l'oscillation de  $f$  en  $x$ , notée  $\omega(x)$ , par

$$\omega(x) = \inf\{\omega(x, \delta) ; \delta > 0\} \quad \text{avec} \quad \omega(x, \delta) = \sup\{|f(t) - f(s)| ; s, t \in B(x, \delta)\}.$$

1. Montrer que  $f$  est continue en  $x$  si et seulement si  $\omega(x) = 0$ .
2. Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $A_\epsilon = \{x \in X ; \omega(x) < \epsilon\}$  est un ouvert.
3. En déduire que l'ensemble des points de continuité de  $f$  est un  $G_\delta$  (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts). En particulier c'est un borélien.

## Mesure de Lebesgue

### Exercice 6

Soit  $N$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue nulle, montrer que  $\mathbb{R} \setminus N$  est dense dans  $\mathbb{R}$  (ind. que peut-on dire de  $]a, b[ \cap (\mathbb{R} \setminus N)$ ?). Que pensez-vous de la réciproque?

### Exercice 7

Soit  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de boréliens de  $\mathbb{R}$ . D'après le cours, si  $\lambda(A_0)$  est fini, alors  $\mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$ . Peut-on se passer de cette hypothèse de finitude?

### Exercice 8 *Un ensemble non dénombrable de mesure de Lebesgue nulle*

1. Soit  $A$  un sous-ensemble dénombrable de  $\mathbb{R}$ , que vaut sa mesure de Lebesgue? En déduire une nouvelle preuve de la non dénombrabilité de  $[0, 1]$ .
2. On considère  $C_0 = [0, 1]$  puis on construit par récurrence  $C_{n+1}$  en enlevant de chaque composante connexe de  $C_n$  l'intérieur de son tiers central. Ainsi  $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ , représenter  $C_2$  et  $C_3$ .
3. Montrer que l'ensemble de Cantor  $C = \cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  est un borélien de mesure de Lebesgue nulle.
4. L'écriture en base 3 ( $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ ) met en bijection l'intervalle  $[0, 1]$  et l'ensemble des suites  $(x_n) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$  ne convergeant pas vers 2. Montrer que  $C$  contient l'ensemble des points de  $[0, 1]$  dont l'écriture en base 3 ne comporte pas le chiffre 1.
5. Trouver une surjection de  $C$  vers  $[0, 1]$  (penser à l'écriture en base 2). En déduire que  $C$  n'est pas dénombrable.
6. On admet que la tribu de Borel de  $\mathbb{R}$  peut être mise en bijection avec  $[0, 1]$  (on dit qu'elle a la *puissance du continu*), en utilisant un résultat de la feuille précédente déduire de ce qui précède qu'il existe des sous-ensembles de  $C$  qui ne sont pas boréliens.

### Exercice 9

Construire un fermé  $A$  de  $[0, 1]$ , de mesure de Lebesgue strictement positive et ne rencontrant pas  $\mathbb{Q}$ . Peut-on faire la même chose si l'on demande à  $A$  d'être ouvert?

### Exercice 10 *Construction d'un ensemble non Lebesgue-mesurable*

On partitionne  $[0, 1]$  par ses classes d'équivalence modulo  $\mathbb{Q}$ . L'axiome du choix assure l'existence d'un ensemble  $A \subset [0, 1]$  qui contient exactement un représentant de chaque classe. On va montrer, par l'absurde, que  $A$  n'est pas mesurable au sens de Lebesgue (exemple de Vitali, 1905). Supposons donc  $A$  mesurable, on note  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ , justifier que  $r + A = \{r + a, a \in A\}$  est mesurable et  $\lambda(r + A) = \lambda(A)$ .
2. Montrer que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (r + A) \subset [-1, 2]$$

3. Si  $\lambda(A) = 0$  prouver que  $\lambda\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (r + A)\right) = 0$ . En déduire une contradiction.
4. Montrer que si  $r$  et  $s$  sont deux rationnels distincts alors  $(r + A) \cap (s + A) = \emptyset$ . En déduire à nouveau une contradiction si l'on suppose  $\lambda(A) > 0$ .

## Fonctions mesurables

### Exercice 11

1. Soit  $\mathcal{T}$  une tribu sur un ensemble  $X$ , montrer que  $A$  est un élément de  $\mathcal{T}$  si et seulement si l'application  $\mathbb{1}_A$  est mesurable de  $(X, \mathcal{T})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .
2. Toute fonction continue de  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est mesurable (en rappeler la preuve). Donner un exemple de fonction mesurable qui n'est pas continue.

### Exercice 12

D'après le cours, si  $f$  est une application mesurable de  $(X, \mathcal{A})$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  alors  $|f|$  est mesurable. Qu'en est-il de la réciproque ?

### Exercice 13

Soit  $f$  une fonction définie sur un espace mesurable  $(X, \mathcal{A})$ , à valeurs réelles. On munit  $\mathbb{R}$  de la tribu des boréliens, montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est mesurable
2. Pour tout intervalle fermé  $[a, b]$ , l'ensemble  $f^{-1}([a, b])$  est mesurable.
3. Pour tout intervalle ouvert  $]a, b[$ , l'ensemble  $f^{-1}(]a, b[)$  est mesurable.
4. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $f^{-1}(]a, +\infty[)$  est mesurable.
5. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $f^{-1}([a, +\infty[)$  est mesurable.
6. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $f^{-1}(]-\infty, a])$  est mesurable.
7. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $f^{-1}(]-\infty, a])$  est mesurable.

### Exercice 14

Soit  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  une fonction mesurable et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $g$  est mesurable. Indication : étudier d'abord le cas  $f(x) = x$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 15

Soit  $X$  un ensemble. Soit  $\mathcal{T}$  une tribu sur  $Y$  et  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ .

1. Quelle est la plus petite tribu  $\mathcal{A}$  sur  $X$  qui rende l'application  $f$  mesurable de  $(X, \mathcal{A})$  sur  $(Y, \mathcal{T})$  ?
2. On suppose que l'image de  $f$  et les singletons de  $Y$  sont des éléments de  $\mathcal{T}$ . Montrer que toute application  $g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$  mesurable s'écrit  $g = h \circ f$ , où

$$h : (Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$$

est une application mesurable. (Question difficile!)

3. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ .
  - (a) Montrer que la plus petite tribu  $\mathcal{A}$  qui rende  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mesurable est

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) / A = -A\}.$$

- (b) Déterminer alors l'ensemble des fonctions mesurables de  $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

### Exercice 16

1. Montrer que toute application monotone de  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est mesurable (indication : que pensez-vous de l'image réciproque d'un intervalle?).
2. Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en tout point alors  $f'$  est mesurable de  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (indication :  $f'$  est-elle la limite d'une suite de fonctions mesurables?)

### Exercice 17

Soit  $\mathcal{A}$  une tribu engendrée par une partition  $(A_n)_{n \geq 0}$  dénombrable d'un ensemble quelconque non vide  $X$ . Montrer qu'une application de  $(X, \mathcal{A})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque  $A_n$ . (indication : on pourra commencer par montrer que

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j, J \subset \mathbb{N} \right\}.$$

### Exercice 18

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue  $\lambda$ -presque partout (c'est-à-dire continue sauf sur un ensemble de mesure nulle pour  $\lambda$ ). L'espace  $\mathbb{R}$  de départ est muni de la tribu de Lebesgue, l'espace  $\mathbb{R}$  d'arrivée est muni de la tribu de Borel.
  - On considère  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  et on note  $A = f^{-1}(O)$ , montrer que les points de  $A \setminus \overset{\circ}{A}$  sont des points de discontinuité de  $f$ .
  - En déduire que  $f$  est mesurable.
2. Une fonction continue presque partout est-elle la même chose qu'une fonction égale presque partout à une fonction continue ?
3. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  montrer que si elles sont égales  $\lambda$ -presque partout alors elles sont égales.

### Exercice 19

Soit  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  une application mesurable. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$E_k^n := f^{-1} \left( \left[ \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \right) \quad k = 1, \dots, n2^n \quad \text{et} \quad F_n := f^{-1}([n, +\infty]),$$

puis

$$f_n := n \mathbb{1}_{F_n} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_k^n}.$$

1. Pour  $f(x) = |x|$ , expliciter  $f_1$  et  $f_2$ .
2. Montrer dans le cas général que  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq f$ .
3. Montrer que  $\lim_n f_n(x) = f(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ .
4. Montrer que la convergence est même uniforme si  $f$  est supposée bornée.

### Exercice 20

Soit  $X = \mathbb{Z}$  et  $A_1 = \{2n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ ;  $A_2 = 2\mathbb{Z} + 1 = \{2n + 1, m \in \mathbb{Z}\}$ ;  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2\}$ .

(a) Trouver  $\sigma(\mathcal{F})$  la tribu sur  $X$  engendrée par  $\mathcal{F}$ .

(b) Les fonctions suivantes sont-elles mesurables de  $(X, \sigma(\mathcal{F}))$  dans  $(X, \sigma(\mathcal{F}))$  ? de  $(X, \sigma(\mathcal{F}))$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ?

(i)  $f_1(x) = x^2$ ; (ii)  $f_2(x) = x + 1$ ; (iii)  $f_3(x) = 4$ ; (iv)  $f_4(x) = 2x$ ; (v)  $f_5(x) = |x|$ .

(c) Décrire les fonctions en escalier mesurables de  $(X, \sigma(\mathcal{F}))$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  puis les fonctions mesurables de  $(X, \sigma(\mathcal{F}))$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .