Exercice 1 Soit $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\mathcal{F} = \big\{\{a\}, \{b, c, d\}\big\}$.

a) Déterminer $\mathscr{A} = \sigma(\mathcal{F})$.

b) Soit μ la mesure de Dirac au point c et soient μ^* et μ_* les mesures extérieures et intérieures associées à μ sur $\mathscr{P}(X)$, i.e.

$$\mu^*(A) := \inf\big\{\mu(S) :\ A \in \mathscr{A} \text{ et } A \subseteq S\big\} \quad \text{et} \quad \mu_*(A) := \sup\big\{\mu(S) :\ A \in \mathscr{A} \text{ et } S \subseteq A\big\}.$$

Calculer $\mu^*(\{b, d\})$ et $\mu^*(\{e\})$ puis $\mu_*(\{b, d\})$ et $\mu_*(\{e\})$

c) Déterminer $\{A \in \mathscr{P}(X) :\ \mu^*(A) > \mu_*(A)\}$.

d) Quelle est la complétion de $\mathscr{A}$ par rapport à μ?

Exercice 2 Soit $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \text{Borel})$ une fonction mesurable et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{si} \quad f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est mesurable. Indication: étudier d'abord le cas $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit (E, d) un espace métrique muni de la tribu de Lebesgue et $f : E \to \mathbb{R}$ continue λ–presque partout. Montrer que f est mesurable.
Indication: Soit $D \subseteq E$ l'ensemble de discontinuités de f. Considérer des ensembles de la forme $F_a = \{x \in E \backslash D :\ f(x) < a\}$? Utiliser la continuité de f pour montrer que F_a est Lebesgue-mesurable. Conclure.

Exercice 4 Soit $f : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}_+}, \text{Borel})$ une application mesurable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_k^n := f^{-1}\left(\left[\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n}\right)\right) \quad k = 0 \ldots n\,2^n \quad \text{et} \quad F_n := f^{-1}([n, +\infty]),$$

puis

$$f_n := n\,\mathbb{1}_{F_n} + \sum_{k \leq n\,2^n} \tfrac{k}{2^n}\,\mathbb{1}_{E_k^n}.$$

a) Pour $f(x) = |x|$, expliciter f_1, f_2 et f_3.

b) Montrer dans le cas général que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots \leq f$.

c) Montrer que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

d) Montrer que la convergence est même uniforme si f est supposée bornée.

Exercice 5 Soit $X = \mathbb{Z}$ et A_1 la partie des nombres pairs non nuls de X et A_2 la partie de X des nombres impairs.

a) Déterminer $\mathscr{A} = \sigma(\{A_1, A_2\})$.

b) Discuter la mésurabilité des fonctions

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x + 1, \quad f_3(x) = 4, \quad f_4(x) = 2x, \quad \text{et} \quad f_5(x) = |x|,$$

vues comme fonctions sur $(X, \mathscr{A})$ et vues comme fonctions $(X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \text{Borel})$.

c) Décrire l'ensemble des fonctions étagées, respectivement des fonctions mesurables de $(X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \text{Borel})$?