Exercice 1 Donner un exemple de fonction continue positive f sur $[0, \infty)$ telle que $\int_0^\infty f(x)\,dx$ est finie et $f(x)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers l'infini. Que dire si on suppose que f est uniformément continue ?

Exercice 2 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré,

a) Soit $\mu = \delta_a$, la masse de Dirac au point $a \in X$ et soit $f \geq 0$ une fonction mesurable. Montrer que
$$\int_X f\,d\mu = f(a)$$

b) Soit $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de dénombrement.
   i) Quelles sont les fonction mesurables $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$?
   ii) Soit $f > 0$. Exprimer $\int_X f\,d\mu$ en fonction de $f(0), f(1), \ldots$.

Exercice 3 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\varphi : \Omega \to [0, \infty)$ une fonction mesurable. On définit pour tout $A \in \mathcal{A}$
$$\nu(A) := \int_A \varphi\,d\mu$$

a) Montrer que ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
b) Sous quelle condition sur φ, ν est-elle une mesure de probabilité ?
c) Vérifier que tout ensemble μ-négligeable est ν-négligeable.
d) Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. Exprimer $\int_\Omega f d\nu$ en fonction d'une intégrale relativement à μ (indication : commencer par les fonctions en escalier).

Exercice 4 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu(X) < \infty$ et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\}, \qquad B_n = \{x \in X : n < |f(x)| \leq n+1\},$$
$$\text{et} \quad C_n = \{x \in X : n \leq |f(x)| < n+1\}.$$

a) Montrer que
$$\int_X |f|\,d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_n n\,\mu(B_n) < \infty \Leftrightarrow \sum_n n\,\mu(C_n) < \infty \Leftrightarrow \sum_n \mu(A_n) < \infty.$$

b) Soit $p > 1$. Montrer que
$$\int_X |f|^p\,d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_n (1+n)^p\,\mu(B_n) < \infty \Leftrightarrow \sum_n (1+n)^p\,\mu(C_n) < \infty \Leftrightarrow \sum_n (1+n)^{p-1}\,\mu(A_n) < \infty.$$

— Théorèmes de Fatou – convergence monotone et dominée

Rappeler les 3 théorèmes. Les comparer: tandis que convergence dominée et monotone sont de la forme

$$(\text{condition sur } (f_n)\ ) \quad \Rightarrow \quad \left(\lim \int f_n = \int \lim f_n\right),$$

Le théorème de Fatou par contre vise de voir ce qu'on peut attendre si on ne suppose **rien**, sauf la mesurabilité omniprésente et la positivité (qui devient nécessaire pour obtenir une inégalité).

Lemme de Fatou

Exercice 5 Soit f_n une suite de fonctions positives, mesurables, qui converge presque partout contre f. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $F_n = \int_0^x f_n(t)\,dt$. Montrer que

$$\int (f + F) \leq \liminf \int (f_n + F_n).$$

Exercice 6 Soit A, B deux parties mesurables de mesure finie de $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Soit $f_{2n} = \mathbb{1}_A$ et $f_{2n+1} = \mathbb{1}_B$. Calculer

$$g := \liminf_{n\to\infty} f_n \qquad \text{et} \qquad h := \limsup_{n\to\infty} f_n$$

exprimer g, h comme indicatrices. Comparer $\int g$ et $\liminf \int f_n$. Construire $A, B \subset \mathbb{R}$ où on a égalité, et un autre exemple avec une inégalité stricte. Pareil pour $\int h$ et $\limsup \int h_n$.

Exercice 7 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$, et g positive et intégrable telle que $f_n \leq g$ pour tout n. Considérer $h_n = g - f_n$ pour montrer

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n$$

Exercice 8 Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Calculer $\int_0^n f(x)\,dx$. Appliquer la question précédente à $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]}(x) f(x)$ pour illustrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9

a) Soit $a, b > 0$. Utiliser $a + b \leq 2\max(a, b)$ pour montrer $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$.

b) Soit f et (f_n) une fonction respectivement une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ telle que

 i) $f_n \to f$ presque partout

 ii) $\int_\Omega |f_n|^p\,d\mu \quad \to \quad \int_\Omega |f|^p\,d\mu$.

Appliquer le lemme de Fatou à $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ pour déduire que $\int_\Omega |f_n - f|^p\,d\mu \to 0$.

Exercice 10 Soit (f_n), (g_n), f, g des fonctios intégrables sur $\mathbb{R}$ telles que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ presque partout. On suppose en plus $|f_n| \leq g_n$ et $\int_{\mathbb{R}} g_n \to \int_{\mathbb{R}} g$. Montrer que $\int f_n \to \int f$.
Inidcation: appliquer le lemme de Fatou à $h_n = g_n + |f| - |f_n - f|$.

Exercice 11 (Une sorte "convergence dominé", différente du théorème standard)
Soit f_n une suite de fonctions positives, mesurables qui converge point par point vers f. Supposons $f_n \leq f$ pour tout n. Montrer que $\lim \int f_n = \int f$.
Attention: il n'est pas supposé que f soit intégrable. Montrer donc d'abord que $\limsup \int f_n \leq \int f$ et combiner ceci avec le lemme de Fatou!
Rem: si (f_n) est croissante ceci démontre le théorème de convergence monotone:

Convergence monotone

Exercice 12 Pour $n \geq 1$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée. Quelle est la différence entre "(f_n) est une suite de fonctions monotones" et "(f_n) est une suite monotone de fonctions" ?

Exercice 13 Soit (f_n) une suite de fonctions positives, et $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Montrer que (g_n) est monotone, et déduire le lemme de Fatou.

Exercice 14 Soit f positive et improprement Riemann-intégrable sur $[0, \infty)$. En utilsant que $\int_0^n f(t)\, dt = \int_{[0,n]} f$, montrer que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec égalité des deux intégrales. Discuter l'hypothèse de positivité à l'exemple de $\sin(x)/x$.

Astuce Soit (f_n) une suite de fonctions numériques sur Ω. On suppose qu'il existe $g : \Omega \times \mathbb{R}_+$ tel que $g(x, n) = f_n(x)$. Observer que si $g(x, .)$ est croissante, alors (f_n) est croissante. Si g est partiellement continûment dérivable par rapport à la deuxième variable, et si celle-ci est positive ou nulle,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_n^{n+1} \tfrac{\partial g}{\partial t} g(x, t)\, dt$$

permet de montrer la monotonie de (f_n).

Exercice 15 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mesurable. On pose $f_n(x) = n \ln(1 + \frac{f(x)}{n})$. Justifier que $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable.

a) Montrer que $\ln(1 + a) = \int_1^{1+a} dx/x \geq a \times \frac{1}{1+a}$ pour $a > 0$.
b) On pose $g(x, t) = t \ln(1 + \frac{f(x)}{t})$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial t} g(x, t)$. Montrer que (f_n) est croissante.
c) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega n \ln(1 + \tfrac{f(x)}{n})\, dx$$

Exercice 16 Calculer $\lim \int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\,dx$.

Exercice 17 Soit $f(x) = xe^{-x^2}$. Calculer $\int_0^n f(x)\,dx$ et déduire que f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\int f\,dx$.

Exercice 18 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}(1-x).$$

a) Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $(f_n)_{k=1}^\infty$ est une suite croissante de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$. Trouver un équivalent (presque partout) de la limite.

b) Démontrer que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2k}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

c) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).$$

d) De la même façon, considérer $f_k(x) = (-1)^k x^{2k}(1-x)$ pour déterminer la valeur de la somme:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}.$$

Exercice 19 Soit $f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ converge, déduire que $f(t) = \sum_{n=0}^\infty -t^n \ln(t)$ pour $t \in [0,1]$. Déduire que f est intégrable sur $(0,1)$ et

$$\int_{(0,1)} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2}.$$

Il n'est pas demandé d'évaluer cette série!

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante et intégrable avec $\int_0^\infty f(t)\,dt > 0$. Montrer que pour $h > 0$,

$$\int_h^\infty f(t)\,dt \leq h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \leq \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

Exercice 21 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$. On pose pour $x \in (0,\infty)$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k e^{-a_k x}$$

a) Montrer que $f(x) = \lim f_n(x)$ existe pour tout $x > 0$.
b) Montrer que (f_n) est croissante.
c) Déduire que $\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{a_k}$.
d) Appliquer au cas $a_k = k+1$ ou $a_k = 2k+1$.

Convergence dominée

Exercice 22 Soit $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Existe-t-il une majoration intégrable pour les fonctions suivantes? Si oui trouver la limite de leur intégrales lorsque $n \to \infty$.

$$f_n = \sqrt{n}\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}, \qquad g_n = \frac{n}{\log n}\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{n}]} \qquad n \geq 1$$

Exercice 23 Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n}{(1+n^2x^2)}\,dx \text{ pour } a>0. \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}dx$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n\sin(x/n)[x(1+x^2)]^{-1}dx \qquad \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty ne^{-nx}\sin(1/x)dx$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^n \arctan(1+x^2/n)\frac{dx}{1+x^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$$

Exercice 24 Soit $S_n = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} : |x-k| < \frac{1}{n}\}$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_n} \frac{dx}{1+x^2}$$

Exercice 25 Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction: $g_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n[}(x^2)(1-\frac{x^2}{n})^n$.
a) Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ existe.
b) Déterminer la limite $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ pour tout $x \in D$.
c) Trouver un majorant intégrable $g(x) \geqslant g_n(x)$ pour tout x, déduire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(x)dx.$$

(on pourra utiliser $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ sans le démontrer).

Exercice 26 Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(x)e^{-n\sin^2 x}dx.$$

Exercice 27 Soit $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que $f_n \to 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$. Cependant, $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$. Est-ce un contre-exemple au théorème de convergence dominé?

Exercice 28 Soit $\lambda(X) < \infty$, et (f_n) une suite de fonctions intégrables sur X qui converge uniformément vers f. Montrer que f est intégrable et que $\int_X f(x)\,dx = \lim \int_X f_n(x)\,dx$.

Exercices mixtes

Exercice 29 Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\sum_n \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\, dx < \infty.$$

Déduire que $g(x) := \sum_n |f_n(x)|$ est intégrable. Déduire que la série $\sum_n f_n(x)$ converge presque partout absolument. Montrer que g est un majorant pour la suite de fonctions

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

et déduire finalement

$$\sum_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_n f_n(x) \Big)\, dx$$

Exercice 30*

a) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \tfrac{x}{n})^n \ln(x)\, dx$$

existe.

b) Faites les changement de variables $1 + x/n = u$, puis développer $\ln(1-u) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k}$.

c) Déduire que

$$\int_0^1 u^n \ln(1-u)\, du = -\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k(n+k+1)} = \tfrac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} (\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{n+k+1})$$

Justifier que cette série est télescopique. La calculer.

d) Déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} \right) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln(x)\, dx$$

Exercice 31* Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de mesure μ finie et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables qui converge vers f. On suppose $|f| < \infty$ presque partout et fixe $\alpha > 0$.

a) Soit $A_n = \{x \in \Omega : |f(x) - f_n(x)| > \alpha\}$. Montrer que

$$\mu(A_n) \to 0$$

Indication: considérer les fonctions $g_n = 1_{A_n}$

b) Soit $F_N = \sup_{k\geq N} |f_k - f|$. Montrer que $F_N \to 0$ presque partout. En déduire que

$$S_N = \bigcup_{k\geq N} A_k$$

satisfait $\mu(S_N) \to 0$ lorsque $N \to \infty$.

c) (Egorov) Soit $\delta > 0$, $m \geq 1$ et $\alpha = 1/m$. Montrer qu'il existe un rang N_m tel que, pour $N \geq N_m$, on ait

$$\mu(S_N) \leq \delta 2^{-m}$$

Justifier que $S = \bigcup_{m\geq 1} S_{N_m}$ est de mesure $\mu(S) < \delta$ et que

$$\forall x \in \Omega \backslash S \quad \forall k \geq N_m : \qquad |f_k(x) - f(x)| \leq 1/m$$

Expliquer que cela signifie que f_n converge uniformément vers f sur $\Omega \backslash S$.

d) (Vitali) On suppose en plus des hypothèses ci-dessus que $|f_n|^p$ est intégrable sur Ω pour tout n et que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall S \subset \Omega,\ S \text{ mesurable} : \qquad \mu(S) < \delta \Rightarrow \int_S |f_n|^p < \epsilon$$

Montrer que $\int_\Omega |f_n - f|^p \, dx$ converge vers 0.
Indications: Choisir S selon la question précédente. Utiliser le lemme de Fatou pour montrer $|f|^p$ est intégrable. Pour conclure, découper

$$\int_\Omega |f_n - f|^p = \int_{\Omega \backslash S} |f_n - f|^p \quad + \quad \int_S |f_n - f|^p$$

et se rappeler que Ω est de mesure finie.