Analyse S2 — Devoir Maison

Exercice 1 Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non-vides bornés. On pose

$$A + B := \{a + b : \quad a \in A, b \in B\}$$

et similairement,

$$A \cdot B := \{a\, b : \quad a \in A, b \in B\}.$$

Est-ce que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (preuve ou un contre-exemple)?

a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

b) $\sup(A \cdot B) = \sup(A). \sup(B)$.

Exercice 2 Pour $x \geq 0$ soit $E[x] := \max\{n \in \mathbb{N} : \quad n \leq x\}$ la partie entière de x.

a) Soit $b > 1$ fixé. Pour $\alpha > 0$, calculer

$$\lim_{n\to\infty} \quad E[\alpha\, b^n]\, b^{-n}.$$

b) Soit $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un unique couple $(k_n, r_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$n = 2^{k_n} + r_n, \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq r_n < 2^{k_n}$$

Avec cette définition, soit $a_n := r_n\, 2^{-k_n}$ pour $n \geq 1$.

i) Montrer $0 \leq a_n \leq 1$.

ii) Déterminer $\inf(a_n)$ et $\sup(a_n)$. S'agit-il d'un minimum ou maximum, respectivement?

iii) Montrer que tout réel de $[0, 1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ (on pensera à la question (a)).

iv) En déduire $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Exercice 3 (Trois questions de cours)

Soit $I = [0, 1]$. Existe-t-il une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) = \mathbb{R}$? Si oui, expliciter un exemple, sinon justifier bien votre réponse. Même question avec la condition $f(I) = (-2, 3)$ (l'intervalle ouvert), respectivement avec la condition $f(I) = [0, 1] \cup [2, 3]$.

— Tourner la page, SVP —

Exercice 4 Soit $f(x) = x^5 + 2x^4 + 16x - 32 + \sqrt{|x|}$. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$? Justifier qu'il existe $x \in [0,2]$ tel que $f(x) = -1$.

Exercice 5 Montrer que $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, si et seulement si il existe une fonction continue $\widehat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\widehat{f}(x) = f(x)$ pour tout $a \leq x < b$ (on dit que $\widehat{f}$ prolonge f continûment au point b).

Indications pour "$\Rightarrow$":

i) Montrer que f est bornée sur $[a,b)$.

ii) Montrer qu'il existe une suite (x_n) dans $[a,b)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) =: \ell \quad \text{existe}$$

iii) Soit (y_n) une suite quelconque de $[a,b)$ qui converge vers b. Montrer que $\lim f(y_n) = \ell$.

iv) Conclure.

Devoir à rendre au plus tard le jeudi 27 avril 2023 pendant le TD.