Université de Bordeaux,
L1 de Mathématiques,
Année 2022-2023

Analyse S2 — Feuille 2

Exercice 1 Relire l'exemple 2.26 et la remarque suivante dans le polycopié. Ensuite, calculer les limites suivantes.

$$a_n = \frac{n^2+2n}{3n^2+5} \qquad a_n = \frac{n^3+3n^2}{3n^4+4} \qquad a_n = \frac{2n\sqrt{n}+7n-3}{1+n^2}$$

$$a_n = \frac{n^2+1}{n\sqrt{n^2+1}} \qquad a_n = \frac{2n^2}{n+2^{-n}} \qquad a_n = \frac{n^2-2^n}{n^2+2^n}$$

$$a_n = \frac{2^n-2^{-n}}{2^n-1} \qquad a_n = \frac{2^{3n}-1}{2^{3n}-3^{2n}} \qquad a_n = \frac{2+n^9+n!}{n^9+n^n}$$

$$a_n = \frac{n\ln(n)+2n}{1+n^2} \qquad a_n = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2} \qquad a_n = \sqrt[n]{5}$$

$$a_n = \sqrt[n]{n} \qquad a_n = \sqrt[n]{\ln(n)} \qquad a_n = \sqrt[n]{n^{2023}}$$

$$a_n = \sqrt[n]{2^n} \qquad a_n = \sqrt[n]{n!} \qquad a_n = \left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)^n \qquad (a,b>0).$$

$$a_n = \tfrac{1}{n}(1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n})$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad a_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 2 Soit $(x_n), (y_n)$ deux suites convergentes qui satisfont $x_n < y_n$ pour tout n. Montrer que $x \leq y$. Donner trois exemples qui illustrent qu'on ne peut pas déduire $x < y$ en général.

Exercice 3 Soit $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$. Justifier que $x_n \in \mathbb{Q}$ pour tout n. Déterminter si (x_n) admet une limite dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}$. Discuter.

Exercice 4 Pour les assertions suivantes, trouver une preuve ou un contre-exemple.

a) Si (a_n) converge, alors $b_n := a_{n+1} - a_n$ tend vers zéro.
b) Si $b_n := a_{n+1} - a_n$ tend vers zéro, alors (a_n) converge.

Exercice 5 Pour les assertions suivantes, trouver une preuve ou un contre-exemple.

a) Les suites (a_n), (b_n) convergent toutes les deux si, et seulement si les suites $(a_n + b_n)$ et $(a_n - b_n)$ convergent toutes les deux.
b) Si (a_n) et (b_n) divergent, alors il est de même pour $(a_n + b_n)$ et $(a_n - b_n)$.
c) Si (a_n) et $(a_n b_n)$ convergeent, alors (b_n) converge.

Exercice 6 Expliquer avec quelques mots 'en prose' les assertions quantifiés suivantes.

a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N: \qquad |a_n| < \varepsilon$

b) $\exists N \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq N: \qquad |a_n| < \varepsilon$

c) $\forall N \geq 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq N: \qquad |a_n| < \varepsilon$

d) $\exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \exists \varepsilon > 0: \qquad |a_n| < \varepsilon$

e) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \geq 0 \quad \exists n \geq N: \qquad |a_n| < \varepsilon$

Exercice 7 Soient $A_1, \ldots, A_N$ des réels positifs fixés. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \left(A_1^n + A_2^n + \ldots + A_N^n\right)^{1/n}$$

Indication: lemme des gendarmes.

Exercice 8 Soit $a_n = \frac{3n}{(-2)^n}$. Extraire une sous-suite croissante et une sous-suite décroissante.

Exercice 9 Soit

$$a_n = \begin{cases} 2 - \frac{1}{n} & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ (-1)^{(n-1)/2} n - n & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

Trouver le minium, le maximum de la suite (a_n) ainsi que tous les valeurs d'adhérence de (a_n). De même avec

$$a_n = (-1)^{n(n+1)/2} \qquad a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} \qquad a_n = (-1)^{n+1} \frac{6n^2 + 5n}{4 + 5n^2} \qquad a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$$

Lesquelles des suites sont de Cauchy?

Exercice 10 Déterminer le inf, sup, lim inf et lim sup des suites données

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad b_n = 3(-1)^{n(n+1)/2} + 2(-1)^n \qquad c_n = \sin(n)$$

Exercice 11 Expliciter une suite (a_n) qui prend respectivement

$$A = \{1, 2\} \qquad B = \{1, 2, 3\} \qquad C = \mathbb{N}$$

comme valeurs d'adhérence. Défi: une suite qui admet $\mathbb{R}$ comme valeurs d'adhérence!

Exercice 12 Soit (a_n) une suite et

$$L = \{\lim a_{\varphi(n)} : \quad \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ str. croissant tel que } \; a_{\varphi(n)} \text{ converge}\}$$

l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Montrer que si (ℓ_n) est une suite d'éléments de L qui converge vers ℓ, alors $\ell \in L$.