Université de Bordeaux,
L1 de Mathématiques,
Année 2022-2023

Analyse S2 — Feuille 6

Questions de cours

Exercice 1 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Expliquer pourquoi il s'agit d'une fonction en escalier. Quelle est son intégrale?

Exercice 2 En revenant à la définition, montrer que f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existent deux fonctions en escalier s, r (avec $r(x) \geq 0$) telles que

$$\forall x \in [a,b] : \quad |f(x) - s(x)| \leq r(x) \qquad \text{et} \qquad \int_a^b r(t)dt \leq \varepsilon$$

Exercice 3 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive et telle qu'il existe $x \in (a,b)$ avec $f(x) > 0$.

a) Utiliser la définition de la continuité pour construire une fonction en escalier φ avec $0 \leq \varphi \leq f$ et telle que
$$\int_a^b \varphi > 0$$
Indication: faîtes un dessin!

b) En déduire que $\int_a^b f > 0$.

Formuler la contraposée de ce que vous avez démontré.

Exercice 4 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée et f Riemann intégrable sur $[a,x]$ pour tout $x \in (a,b)$. Le but est de montrer qu'alors f est Riemann intégrable sur $[a,b]$.

a) Soit $a < x < b$. Construire des fonctions en escalier φ, ψ avec $\varphi \leq f \leq \psi$ sur $[a,b]$ à partir de celles (qui doivent, par hypothèse, exister) sur $[a,x]$. Indication: faîtes un dessin!

b) Observer ce qui se passe avec le "bout rajouté" en haut, si x est très proche de b. Démontrer que f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et que
$$\lim_{x \to b-} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^b f(t)dt$$

c) Considérer $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $[0,1)$ et $f(1) = 0$. Est-ce que le précédent s'applique? Calculer $\int_a^x f(t)\, dt$ explicitement (soit via une primitive soit via des sommes de Riemann).

Exercice 5

a) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right)$.

b) Pour tout entier $n > 0$, on note $A_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\, n^n}}$, exprimer $\ln(A_n)$ comme une somme, puis en déduire que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{4}{e}$.

Exercice 6 **(À faire absolument)**

a) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, et $x \in (a,b)$. Dessiner le graphe de f sur $[x, x+h]$ (avec h suffisamment petit).

b) Soit $\varepsilon > 0$. Expliquer pourquoi il existe un $\delta > 0$, que l'on peut même choisir indépendamment de x, tel que $|h| < \delta$ implique que $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [x-h, x+h]$. On dira que $f(t) \simeq f(x)$ "à ε près". En déduire que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \quad \simeq \quad \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt = f(x)$$

"à ε près" (bien lire les t, x, ce ne sont pas des fautes de frappe). En déduire que la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

(définie sur $[a,b]$) est dérivable sur (a,b), de dérivée f et que pour tout intervalle $[c,d] \subset [a,b]$, on a

$$\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c).$$

Exercice 7

a) Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\, dt = 0.$$

b) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann intégrable.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\, dt = 0.$$

Remarque: la même chose fonctionne avec $\cos(nt)$, et –via un découpage en parties imaginaires et complexes– pour e^{int} à la place de $\sin(nt)$.

Exercice 8 Trouver trois exemples de fonctions f, g, Riemann intégrables sur $[0,1]$ telles que

$$\int_0^1 f(t)g(t)\, dt \neq \left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right)$$

Exercice 9 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann intégrable, et $f_+ := \max(0,f)$, et $f_- := \max(0,-f)$. Comparer

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \left(\int_a^b f_+(x)dx \; - \; \int_a^b f_-(x)dx\right)$$

Interpréter dans ce sens les intégrales suivantes comme sommes ou différence d'aires: obtenir ainsi les valeurs numériques "sans calcul" via un dessin et une interprétation adapté.

$$\int_{-1}^1 x^3\,dx \qquad \int_{-1}^1 |x|\,dx \qquad \int_{-1}^1 x^3\cos(x)\,dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^1 (x^5+3)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Primitives

Exercice 10 Soit $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Dériver f pour trouver une primitive de $x^{\alpha-1}$. Calculer

$$\int_0^1 t^{2022}\,dt$$

De la même manière, relire le tableau de dérivées de fonctions "à l'envers" comme table de primitives.

Exercice 11 Soit $f(x) = x^{3/2}\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
b) Justifier ensuite que f' n'est pas Riemann intégrable sur $[-1,1]$ (on lira la définition de l'intégrale de Riemann avec soin).

Exercice 12 Calculer les deux premières dérivées de

$$F(x) = \int_0^x \cos(t)\,dt \qquad G(x) = \int_0^{x^3} \sin^3(t)\,dt \qquad H(x) = \int_{15}^x \left(\int_8^y \frac{1+t^2+\sin^2(t)}{d}t\right)dy.$$

Intégration par parties

Exercice 13 Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Calculer $(uv)'$ et le primitiver de deux manières. En déduire la formule d'intégration par parties.

Exercice 14 Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$ pour $n = 1, 2, 3$.

Exercice 15 Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos(x)}.$$

Indication : on rappelle que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

Exercice 16 Calculer les intégrales suivantes (on pourra intégrer par parties).

$$C_1 = \int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx \;; \qquad C_2 = \int_0^1 \arctan x\,dx \;;$$
$$C_3 = \int_0^1 (x^2+1)\cos x\,dx \;; \qquad C_4 = \int_1^2 (3x^2+x+1)\ln x\,dx.$$

Exercice 17 Calculer la primitive $F_1(x) = \int_1^x 1.\ln(t)\,dt$, puis une formule de récursion pour $F_n(x) = \int_1^x \ln(s)^n\,ds$ en fonction de F_{n-1}.

Exercice 18 Calculer

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,dx \qquad \int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx \qquad \int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx \qquad \int_0^\pi e^x\sin(x)\cos(x)\,dx$$

Exercice 19 Sur $[a,b]$ soit f une fonction strictement positive, dérivable avec une dérivée Riemann intégrable. Justifier que $\frac{f'}{f}$ est Riemann intégrable, puis montrer que

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \ln(\frac{f(b)}{f(a)}).$$

Exercice 20 Montrer par récurrence que

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)^{2n+1} = \frac{2^n\,n!}{\prod_{k=0}^n (2k+1)}$$

Changement de variables

Exercice 21 Pour deux fonctions u, v de classe C^1, calculer la dérivée de $u(v(x))$ puis primitiver de deux manières. Obtenez la règle du changement de variables.

Exercice 22 Calculer les intégrales suivantes (on pourra effectuer des changements de variables).

$$D_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx \;; \qquad D_2 = \int_0^1 e^x\cos(e^x)\,dx \;; \qquad D_3 = \int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx \;;$$
$$D_4 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x+1)}\,dx \;; \qquad D_5 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \;; \qquad D_6 = \int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

(poser $t = \ln x$ dans D_1, D_3 et D_4; poser $x = \sin u$ dans D_5; poser $y = 1/x$ dans D_6).

Exercice 23 Calculer $\int_0^1 (1-3x)^3\, dx$, $\int_0^1 3x^2 e^{x^3}\, dx$, $\int_0^1 e^x \sin(e^x)\, dx$, puis

$$\int_0^1 e^{e^x} e^x\, dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos(5x+1)\, dx, \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\, dx$$

Exercice 24 Calculer

$$\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x \cot(x^2)\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\, dx \qquad \int_1^2 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Fonctions rationnelles

Relire la décomposition en fractions simples dans le polycopié. dans

Exercice 25 Écrire sous la forme $f(x) = R(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$ la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, puis $g(x) = \frac{x^3}{x^3+3x^2+6x+6}$. Calculer ainsi

$$\int_0^1 f(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 g(x)\, dx$$

Exercice 26 **(cas d'un polynôme scindé)**

a) Exemple:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)(x-3)}\, dx$$

On veut écrire pour tout $x \notin \{2,3\}$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$$

avec A, B à chercher. Multiplier avec $(x-2)(x-3)$. Maintenant c'est une équation *polynomiale*, et elle est valable sur $\mathbb{R}\backslash\{2,3\}$ ssi elle est valable sur $\mathbb{R}$/ Pourquoi ??! Dans l'équation polynomiale, évaluer $x = 2$, puis $x = 3$ pour obtenir A, B gratuitement! Conclure.

b) A vous, calculer

$$\int_2^4 \frac{3x}{(x+5)(2x-1)}$$

Exercice 27 **(facteurs linéaires répétés)**

a) Exemple

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)}\, dx$$

On veut écrire pour tout $x \notin \{-1, 2\}$

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x-2)}$$

avec A, B, C, D à chercher. La méthode précédente ne marche plus très bien. Certes, $x = 2$ donnera $D = 3$ et $x = 1$ donnera $C = -2$. Pour récupérer A, B on peut évaluer dans 2 autres points et résoudre le système linéaire. Ou dériver, et réessayer $x = 1, 2$! Au choix.

b) A vous, calculer

$$\int_2^4 \frac{3x+2}{(x^2-4)(x^2-9)}$$

Exercice 28 (facteur quadratique (I))

a) Exemple

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

Le polynôme dénominateur n'a pas de racines réelles. On passe à un extension quadratique:

$$\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2+2}$$

maintenant le changement de variables $x+1 = \sqrt{2}u$ nous amène tranquillement à un arctan. Comment?

b) A vous,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+13}$$

Exercice 29 (facteur quadratique (II))

a) Exemple

$$\frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{x+2}{(x+1)^2+2}$$

et donc? On manipule un peu plus:

$$\frac{x+2}{(x+1)^2+2} = \frac{x+1}{(x+1)^2+2} + \frac{1}{(x+1)^2+2}$$

le deuxième terme suit la recette (I), le premier terme se simplifie via $u = (x+1)^2 + 2$ en $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$.

b) A vous: calculer

$$\int_5^7 \frac{3x+1}{x^2-6x+18}\, dx$$

Exercice 30 (mais où est le polynôme?)

$$\int_8^9 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\, dx$$