Université de Bordeaux 2016-2017

DS Analyse 1 11:30-13:00
Lundi 8 mars 2017

Exercice 1. [**3 points**]

(1) Donner la définition d'une suite convergente.
(2) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 2. [**4 points**] Calculer les limites des suites suivantes:

(1) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n + (-1)^{n+1}}, \quad n \geq 1.$
(2) $v_n = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$

Exercice 3. [**4 points**] $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n)^2 + 1 \quad \text{si} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.
(3) Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
(4) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 4. [**9 points**] On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définies pour tout $n \geq 0$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{si } n \geq 0, \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 2, \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{si } n \geq 0.$$

(1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
(2) Montrer que $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$
(3) On considère la suite $w_n = v_n - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression w_n en fonction de n et calculer sa limite.
(4) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
(5) Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots w_{n-1} + w_n$.
(6) En remarquant que nous avons aussi $w_n = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$. Exprimer S_n en fonction de u_{n+1} et u_0.
(7) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(8) Calculer la limite de u_n.