université de BORDEAUX	ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018 CODE UE : 4TPM209 U (Analyse) Devoir surveillé terminal Date : 14/03/2018 Heure : 9h00 Durée : 1h30 Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

Exercice 1. (3 POINTS)

(1) Donner la définition d'une suite convergente.

(2) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

(3) Donner la définition d'une fonction continue en x_0.

Exercice 2. (3 POINTS) Calculer les limites des suites suivantes

(1) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos(n)}{2n+(-1)^n}, \quad n \geq 1.$

(2) $w_n = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}, \quad n \geq 1.$

Exercice 3. (5 POINTS) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{4}(2-x^2)$$

et on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Etudier la fonction f et dresser son tableau de variation (on pensera à calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$).

(2) Montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$.

(3) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

(4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4. (5 POINTS) Soit les deux suites suivantes

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{6}(v_n - u_n)$.

(2) Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \leq v_n$.

(3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

(4) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

Exercice 5. (5 POINTS) Soit la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k}{(k+1)^2}$$

(1) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $p \geq 1$ on a

$$|s_{n+p} - s_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

(2) Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt.$

(3) En déduire que pour tout $n \geq 0$ et $p \geq 1$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_n^{n+p+1} \frac{1}{t^2} dt.$$

(4) La suite $(s_n)_{n\geq 0}$ est -elle de Cauchy ? Converge t-elle ?