université de BORDEAUX	ANNEE UNIVERSITAIRE 2019/2020 DSI CODE UE : 4TPM209 Analyse Date : 12/03/2020 Heure 11h30 Durée : 1h00 Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'UB est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

Les réponses doivent être justifiées.
Le barème est indicatif.

Question et démonstration de cours. [4 points]

(1) Donner la définition de $(u_n)_{n\geq 0}$ suite croissante.

(2) Démontrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

Exercice 1. [6 points]

(1) Calculer la limite de la suite dont le terme général est $a_n = \dfrac{n-1+(-1)^n}{n+1}$, $n \geq 0$.

(2) Soit $A = \left\{\dfrac{n-1+(-1)^n}{n+1}\ ;\ n \geq 0\right\}$.

(a) Justifier que l'ensemble A admet une borne supérieure.

(b) Déterminer la borne supérieure de A.

(c) Est-ce un maximum ?

Exercice 2. [11 points]

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1-u_n)^2 \end{cases}$$

(1) On définit sur $[0,1]$ la fonction f par $f(x) = (1-x)^2$. Étudier les variations de f et montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

(2) En déduire que la fonction $g = f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$. (*On rappelle que* $(f \circ f)(x) = f(f(x))$.)

(3) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle monotone ?

(4) Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, montrer que la seule valeur possible est $\ell = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(5) On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de terme général $v_n = u_{2n}$. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = g(v_n).$$

(6) Justifier que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante puis qu'elle converge et que sa limite $\ell_1 \in [\dfrac{1}{2}, 1]$.

(7) Que peut-on en conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?