UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Calcul différentiel

Corrigé du Devoir Surveillé du 10 novembre 2014

Exercice 1.

On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue.

La continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ découle du fait que les fonctions $\sqrt{x^2+y^2}$, sin et xy sont continues sur leurs domaines de définition et $\sqrt{x^2+y^2}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour prouver que f est continue en $(0,0)$ on pose $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ où $r = \|(x,y)\|_2 \geqslant 0$. Alors

$$|f(x,y)| = |r\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(1/r)| \leqslant r = \|(x,y)\|_2,$$

d'où on trouve que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Donc f est continue en $(0,0)$.

2) Soit $e = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$, où $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Calculer, quand elle existe, la dérivée directionnelle $D(f)_{0,e}$ de f en $(0,0)$ selon la direction e.

On a

$$D(f)_{0,e} = \lim_{t\to 0} \frac{f(te)}{t}.$$

Comme $\sqrt{x^2+y^2} = |t|$, on a

$$\frac{f(te)}{t} = \frac{t^2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(1/t)}{t|t|} = \pm\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(1/t).$$

La fonction $\sin(1/t)$ n'admet pas de limite en $t = 0$. Donc $D(f)_{0,e}$ n'existe que si $\sin(\theta) = 0$ ou $\cos(\theta) = 0$. Donc $D_{0,e}(f) = 0$ si $e = (1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ ou $(0,-1)$ et n'existe dans aucune autre direction.

3) La fonction f, admet-elle des dérivées partielles en 0. Est-elle différentiable en 0?

En posant $e = (1,0)$ et $e = (0,1)$ dans la question précédente on trouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Comme une fonction différentiable admet une dérivé directionnelle dans toutes les directions, la question 2) montre que f n'est pas différentiable.

Exercice 2.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable définie sur un ouvert U et soit $\ell : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On fixe un point $a \in U$ et on pose $\varphi(x) = f(a+x) - f(a) - \ell(x)$.

1) Supposons que $[a, a+x] \subset U$. En utilisant le théorème des accroissements finis et la linéarité de ℓ donner une majoration de $\|\varphi(x)\|_F$.

On a
$$\|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}^n} = \|\varphi(x) - \varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \sup_{\xi \in]0,x[} \|D(\varphi)_\xi\| \|x\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Comme ℓ est linéaire, $D(\ell)_\xi = \ell$ et $D(\varphi)_\xi = D(f)_{a+\xi} - \ell$. Donc
$$\|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \sup_{\xi \in]0,x[} \|D(f)_{a+\xi} - \ell\| \|x\|_{\mathbb{R}^m}.$$

2) Prouver le résultat suivant. Supposons que la fonction $\psi : U \setminus \{a\} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ donnée par $\psi(x) = D(f)_x$ admet une limite $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ quand x tend vers a. Prouver qu'alors $\ell = D(f)_a$.

Soit
$$\varepsilon(x) = \frac{f(a+x) - f(a) - \ell(x)}{\|x\|_{\mathbb{R}^m}}.$$

En utilisant l'inégalité précédente on a
$$\|\varepsilon(x)\|_{\mathbb{R}^n} = \frac{\|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^m}} \leqslant \sup_{\xi \in]0,x[} \|D(f)_{a+\xi} - \ell\| \to 0$$
quand $x \to 0$.

Exercice 3.

Soit $C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$. On note $C_0^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = 0$. Pour tout $f \in C_0^1([0,1], \mathbb{R})$ on pose $\|f\|_0 = \|f'\|_\infty$. On admet que $\|\cdot\|_0$ est une norme sur $C_0^1([0,1], \mathbb{R})$ pour laquelle $C_0^1([0,1], \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

1) Prouver que $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_0$ pour tout $f \in C_0^1([0,1], \mathbb{R})$.

On a
$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leqslant |x| \|f'\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty$$
pour tout $x \in [0,1]$. Donc
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leqslant \|f'\|_\infty = \|f\|_0.$$

2) Soit $\Phi : C_0^1([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ l'application définie par $\Phi(f) = f' + f'f$. Montrer que Φ est une application différentiable et calculer $D(\Phi)_f$ en tout $f \in C_0^1([0,1],\mathbb{R})$.

On a

$$\Phi(f+h) = (f'+h')(1+f+h) = f' + f'f + h' + h'f + h'h + f'h.$$

L'application $L(h) = h'(1+f) + f'h$ est linéaire. Pour prouver qu'elle est continue on remarque que

$$\|L(h)\|_\infty \leqslant \|h'(1+f)\|_\infty + \|hf'\|_\infty \leqslant \|h'\|_\infty \|1+f\|_\infty + \|h\|_\infty \|f'\|_\infty \leqslant$$
$$\|h\|_0 \|1+f\|_\infty + \|h\|_0 \|f'\|_\infty \leqslant (\|1+f\|_\infty + \|f'\|_\infty)\|h\|_0$$

d'où on trouve que L est continue et que $\|L\| \leqslant \|1+f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. En posant $\varepsilon(h) = h'h/\|h\|_0$ on a

$$\Phi(f+h) - \Phi(f) = L(h) + \|h\|_0 \varepsilon(h),$$

où

$$\|\varepsilon(h)\|_\infty = \|h'h\|_\infty / \|h\|_0 \leqslant \|h'\|_\infty \|h\|_\infty / \|h\|_0 = \|h\|_\infty.$$

Comme $\|h\|_\infty \leqslant \|h\|_0$, on obtient que $\varepsilon(h) \to 0$ quand $\|h\|_0 \to 0$. Donc Φ est différentiable et $D(\Phi)_f = L$.

3) Prouver que l'application Φ est de classe C^1.

Soient $f, g \in C_0^1([0,1],\mathbb{R})$. On a

$$\|D(\Phi)_f(h) - D(\Phi)_g(h)\|_\infty = \|(f-g)h' + (f'-g')h\|_\infty \leqslant$$
$$\|(f-g)h'\|_\infty + \|(f'-g')h\|_\infty \leqslant \|f-g\|_\infty \|h'\|_\infty + \|f'-g'\|_\infty \|h\|_\infty \leqslant$$
$$\|f-g\|_\infty \|h\|_0 + \|f'-g'\|_\infty \|h\|_\infty \leqslant (\|f-g\|_\infty + \|f'-g'\|_\infty)\|h\|_0 \leqslant$$
$$2\|f-g\|_0 \|h\|_0.$$

Donc $\|D(\Phi)_f - D(\Phi)_g\| \leqslant 2\|f-g\|_0$ d'où on déduit que l'application $f \mapsto D(\Phi)_f$ est continue.

4) Montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $C_0^1([0,1],\mathbb{R})$ sur un voisinage de 0 dans $C_0^1([0,1],\mathbb{R})$.

On a $D(\Phi)_0(h) = h'$ et pour appliquer le théorème d'inversion locale il faut prouver que $D(\Phi)_0$ admet un inverse continu. Pour tout $k(x) \in C([0,1],\mathbb{R})$ posons

$$u(k(x)) = g(x)$$

où

$$g(x) = \int_0^x k(t)dt.$$

Alors $g(x) \in C_0^1([0,1],\mathbb{R})$ et il est clair que l'application $k(x) \mapsto u(k(x))$ est linéaire. Comme

$$\|u(k)\|_0 = \|g\|_0 = \|g'\|_\infty = \|k\|_\infty$$

on voit que u est une application continue $C([0,1],\mathbb{R}) \to C_0^1([0,1],\mathbb{R})$. D'autre part, $D(\Phi)_0 \circ u = \mathrm{id}$ et $u \circ D(\Phi)_0 = \mathrm{id}$. Donc $u = D(\Phi)_0^{-1}$ et on a prouvé que

$$D(\Phi)_0 \in Isom(C_0^1([0,1],\mathbb{R}), C([0,1],\mathbb{R}).$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème d'inversion locale pour conclure.

FIN