UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Calcul différentiel

Devoir Surveillé

le 10 novembre 2014

Durée 1h30. Documents non autorisés

Exercice 1.

On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue.

2) Soit $e = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$, où $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Calculer, quand elle existe, la dérivée directionnelle $D(f)_{0,e}$ de f en $(0,0)$ selon la direction e.

3) La fonction f, admet-elle des dérivées partielles en 0. Est-elle différentiable en 0?

Exercice 2.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable définie sur un ouvert U et soit $\ell : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On fixe un point $a \in U$ et on pose $\varphi(x) = f(a+x) - f(a) - \ell(x)$.

1) Supposons que $[a, a+x] \subset U$. En utilisant le théorème des accroissements finis et la linéarité de ℓ donner une majoration de $\|\varphi(x)\|_F$.

2) Prouver le résultat suivant. Supposons que la fonction $\psi : U \setminus \{a\} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ donnée par $\psi(x) = D(f)_x$ admet une limite $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ quand x tend vers a. Prouver qu'alors $\ell = D(f)_a$.

Exercice 3.

Soit $C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$. On note $C_0^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = 0$. Pour tout $f \in C_0^1([0,1], \mathbb{R})$ on pose $\|f\|_0 = \|f'\|_\infty$. On admet que $\|\cdot\|_0$ est une norme sur $C_0^1([0,1], \mathbb{R})$ pour laquelle $C_0^1([0,1], \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

1) Prouver que $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_0$ pour tout $f \in C_0^1([0,1],\mathbb{R})$.

2) Soit $\Phi : C_0^1([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ l'application définie par $\Phi(f) = f' + f'f$. Montrer que Φ est une application différentiable et calculer $D(\Phi)_f$ en tout $f \in C_0^1([0,1],\mathbb{R})$.

3) Prouver que l'application Φ est de classe C^1.

4) Montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $C_0^1([0,1],\mathbb{R})$ sur un voisinage de 0 dans $C_0^1([0,1],\mathbb{R})$.

FIN