UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Calcul différentiel

Examen

le 15 décembre 2015

Durée 3h. Aucun document autorisé.

Exercice 1. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ le disque de rayon 1. On considère la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

1) On note U l'intérieur de D. Trouver les points critiques de f sur U.

2) Déterminer les extrema locaux de f sur U.

3) Déterminer le maximum et le minimum absolus de f sur D.

Exercice 2. Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ellipsoïde

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = xyz.$$

1) Prouver que f atteint son maximum et son minimum sur X.

2) Trouver les extrema relatifs de f sur X.

3) Quel est le plus grand volume d'un parallélépipède rectangle qu'on peut inscrire dans X?

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x, xy, xyz)$.

1) Déterminer l'ensemble U des points au voisinage desquels f est un C^1-difféomorphisme local

2) Prouver que f induit un difféomorphisme global de U sur $f(U)$.

2) Déterminer $f(U)$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = e^{y(t)} - 1. \qquad (*)$$

1) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

a) Prouver qu'il existe une unique solution maximale $(y(t),]a, b[)$ de l'équation (*) vérifiant $y(0) = y_0$.

b) Donner l'unique solution de l'équation (*) pour $y_0 = 0$?

2) Supposons que $y_0 > 0$.

a) Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $t \in]a, b[$.

b) Montrer que $y(t)$ est croissante. En déduire que

$$y'(t)e^{-y(t)} \geqslant 1 - e^{-y_0}$$

pour tout $t \in [0, b[$.

c) Montrer que $a = -\infty$ et $b < +\infty$.

3) Supposons que $y_0 < 0$.

a) Montrer que $y(t) < 0$ pour tout $t \in]a, b[$.

b) Montrer que $y(t)$ est décroissante et que

$$y_0 - t \leqslant y(t) \leqslant y_0, \qquad t \in]0, b[.$$

c) Montrer que $a = -\infty$.

d) Montrer que $b = +\infty$.

FIN