

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Équations différentielles et calcul différentiel

le 9 novembre 2018

Durée 1h30. Aucun document autorisé.

TOUTES LES REPONSES DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
- 2) Calculer e^{At} et e^{-At} , où t est une variable.

On considère le système d'équations différentielles suivant

$$(*) \quad \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = -6x(t) - 4y(t). \end{cases}$$

- 3) Expliciter la solution générale du système (*).
- 4a) Trouver les solutions $(x(t), y(t))$ du système (*) vérifiant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

- 4b) Trouver les solutions $(x(t), y(t))$ du système (*) vérifiant

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

- 4c) Dans chacun des deux cas précédents 4a) et 4b), tracer la trajectoire.

5) Soit $(x(t), y(t))$ une solution du système (*) qui n'est pas du type 4a) ou 4b). Montrer que la trajectoire de $(x(t), y(t))$ admet deux asymptotes (lorsque $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow +\infty$ respectivement) dont on déterminera les équations.

6) Donner l'allure de la trajectoire de la solution du problème de Cauchy $x(0) = -3, y(0) = 3, 5$.

Tournez la page s.v.p.

2

7) On considère le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 3y(t) + 1, \\ y'(t) = -6x(t) - 4y(t) - 1. \end{cases}$$

Donner la solution du problème de Cauchy $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ pour ce système.

Exercice 2. On considère le système d'équations différentielles d'ordre 2:

$$(**) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -kx(t) - \ell y(t). \end{cases}$$

où k et $\ell \in \mathbf{R}$ sont des paramètres fixés.

- 1) Représenter dans le plan $Ok\ell$ l'ensemble des points (k, ℓ) pour lesquels le portrait de phase du système (***) est
 - 1a) un foyer attractif (resp. répulsif);
 - 1b) un nœud attractif (resp. répulsif);
 - 1c) une selle.

Rappeler l'allure des portraits de phases des 3 cas listés.

- 2) Donner l'allure du portrait de phase lorsque (k, ℓ) n'appartient à aucun des ensembles précédents.

FIN