UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Calcul différentiel

Corrigé de l'examen du 15 décembre 2017

Durée 3h. Aucun document autorisé.

Toutes les reponses doivent être justifiées.

La rédaction sera prise en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1. 1) Énoncer le théorème des fonctions implicites.

Réponse. Confer le cours.

On considère la relation

$$\cos(x+y) = 1+y.$$

2) Montrer que cette relation définit, au voisinage de 0 une fonction continument différentiable $\theta(x)$ vérifiant

$$\cos(x+\theta(x)) = 1+\theta(x).$$

Solution. Soit $f(x,y) = 1+y-\cos(x+y)$. Alors f est continument différentiable et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sin(x+y)$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1+\sin(x+y)$. Comme $f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 1 \neq 0$, par le théorème des fonctions implicites il existe une fonction continument différentiable $\theta(x)$, définie sur un voisinage de 0 et telle que $f(x,\theta(x)) = 0$. Donc

$$\cos(x+\theta(x)) = 1+\theta(x).$$

3) Montrer que $\theta(x)$ admet la dérivée seconde et calculer $\theta'(0)$ et $\theta''(0)$.

Solution. On a

$$\theta'(x) = -\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\theta(x)}\right)^{-1} \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{y=\theta(x)} =$$
$$= -\frac{\sin(x+\theta(x))}{1+\sin(x+\theta(x))} = -1 + \frac{1}{1+\sin(x+\theta(x))}.$$

On en déduit que $\theta'(0) = 0$. Comme

$$\theta''(x) = \left(\frac{1}{1+\sin(x+\theta(x))}\right)' = -\frac{\cos(x+\theta(x))(1+\theta'(x))}{(1+\sin(x+\theta(x)))^2}$$

on obtient que $\theta''(0) = -1$.

Exercice 2. 1) Énoncer le théorème d'inversion locale.

Réponse. Confer le cours.

On considère l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x+y, 3x+\sin(x)+\sin(y)), \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

2) Déterminer en quels points $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ l'application f est un difféomorphisme local, *i.e.* il existe des voisinages ouverts $U_{(x,y)}$ et $V_{f(x,y)}$ de (x,y) et $f(x,y)$ tels que f est un difféomorphisme de $U_{(x,y)}$ sur $V_{f(x,y)}$.

Solution. Comme

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (1, 3+\cos(x)), \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (1, \cos(y)),$$

l'application $f(x,y)$ est de classe C^1 et

$$Jac(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3+\cos(x) & \cos(y) \end{pmatrix}$$

Donc $\det(Jac(f)_{(x,y)}) = \cos(y) - 3 - \cos(x)$. Comme $|\cos(x)| \leqslant 1$ et $|\cos(y)| \leqslant 1$, on en déduit que $\det(Jac(f)_{(x,y)}) \leqslant -1$, d'où $\det(Jac(f)_{(x,y)}) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Par le théorème d'inversion locale, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ il existe des voisinages ouverts $U_{(x,y)}$ et $V_{f(x,y)}$ de (x,y) et $f(x,y)$ tels que f est un difféomorphisme de $U_{(x,y)}$ sur $V_{f(x,y)}$.

3) Montrer que pour tout $a \in \mathbf{R}$ l'application $g_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$g_a(x) = 3x + \sin(x) + \sin(a-x)$$

est bijective.

Solution. Comme $|\cos(x)| \leqslant 1$ et $|\cos(a-x)| \leqslant 1$, on a $g_a'(x) = 3 + \cos(x) - \cos(a-x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, Donc la fonction $g_a(x)$ est strictement croissante et l'application $g_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est injective. Comme $\lim_{x\to-\infty} g_a(x) = -\infty$ and $\lim_{x\to+\infty} g_a(x) = +\infty$, l'application g_a est surjective par le théorème des valeurs intermédiaires.

4) Monter que l'application f est bijective. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

Solution. Il faut montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ l'équation $f(x,y) = (a,b)$ admet une solution dans $\mathbf{R}^2$ et une seule. On a

$$\begin{cases} x + y = a \\ 3x + \sin(x) + \sin(y) = b, \end{cases}$$

d'où $y = a - x$ et $3x + \sin(x) + \sin(a-x) = g_a(x) = b$. Par la question 3), il existe un unique $x_0 \in \mathbf{R}$ vérifiant $g_a(x_0) = b$. On en déduit que $(x_0, a - x_0)$ est l'unique solution de l'équation $f(x,y) = (a,b)$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = x(t)^4 - tx(t)^2. \qquad (*)$$

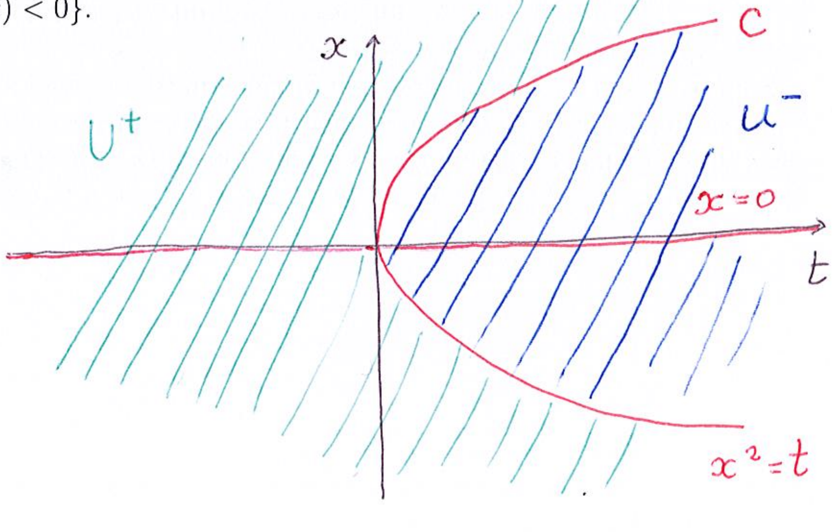
1) Enoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Montrer que pour tous $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ il existe une unique solution maximale $x(t)$ de l'équation (*) vérifiant $x(t_0) = x_0$.

Solution. Confer le cours pour l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz. L'équation (*) s'écrit $x'(t) = f(t, x(t))$, où $f(t,x) = x^4 - tx^2$. Comme les fonctions $f(t,x)$ et $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = 4x^3 - 2tx$ sont continues (fonctions polynomiales), f est de classe C^1 par rapport à x et par le théorème de Cauchy-Lipschitz tout problème de Cauchy admet un unique solution maximale.

2) Pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$ donner la solution maximale du problème de Cauchy $x(t_0) = 0$.

Solution. La fonction $x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ est une solution maximale du problème de Cauchy $x(t_0) = 0$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz cette solution et unique.

3) Soit $f(t,x) = x^4 - tx^2$. Représenter graphiquement les ensembles $C = \{(t,x) \mid f(t,x) = 0\}$, $U^+ = \{(t,x) \mid f(t,x) > 0\}$ et $U^- = \{(t,x) \mid f(t,x) < 0\}$.



Dans le reste de cet exercice on fixe t_0 et x_0 et on note $x(t)$ la solution maximale du problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$. Soit $]a, b[$ l'intervalle de vie de $x(t)$. Soit $\Gamma = \{(t, x(t)) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in]a, b[\}$ le graphe de $x(t)$.

4) Montrer que si Γ coupe la parabole $t = x^2$ en un point (t_1, x_1), alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_1, t_1 + \delta[$ on a $(t, x(t)) \in U^-$.

Solution. Supposons que Γ coupe la parabole $t = x^2$ en (t_1, x_1). Alors $x'(t_1) = (x(t_1)^2 - t_1)x(t_1)^2 = 0$. Donc

$$x(t_1 + h) = x(t_1) + x'(t_1)h + \varepsilon(h)h = x_1 + \varepsilon(h)h,$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Donc

$$f(t_1 + h, x(t_1 + h)) = x(t_1 + h)^2(x(t_1 + h)^2 - t_1 - h)$$

où

$$x(t_1 + h)^2 - t_1 - h = (x_1 + \varepsilon(h)h)^2 - t_1 - h = (2x_1\varepsilon(h) - 1)h.$$

On remarque que $x(t_1 + h) \neq 0$ (sinon $x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ par l'unicité de solutions). Comme $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $2x_1\varepsilon(h) < 1$ pour tout $h \in]0, \delta[$. Donc pour tout $h \in]0, \delta[$ on a que $f(t_1 + h, x(t_1 + h)) < 0$ d'où l'assertion voulue.

Dans les questions 5) et 6) on suppose que $t_0 > 0$, $x_0 > 0$ et $x_0^2 \leqslant t_0$.

5) Montrer que $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

Solution. a) Il résulte de la question 4) que si $x_0^2 \leqslant t_0$ *i.e* si $(t_0, x_0) \in U^-$, alors pour tout $t \in [t_0, b[$ on a $(t, x(t)) \in U^-$ (*i.e.* la partie droite de Γ ne sort pas de la zone U^-). (Ici on exclut le cas $x_0 = 0$ qui est étudié dans la question 2)). Prouvons cette propriété par l'absurde. Supposons qu'il existe $\xi \in [t_0, b[$ tel que $(\xi, x(\xi)) \in U^+$ i.e. que $f(\xi, x(\xi)) > 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $f(t, x(t))$, il existe $t_1 \in]t_0, b[$ tel que $y(t_1) = 0$ et $y(t) > 0$ pour $t \in]t_1, \xi[$ (on peut poser $t_1 = \sup(Z)$, où Z est l'ensemble des zéros de la fonction $f(t, x(t))$ dans l'intervalle $[t_0, b_1]$). Ceci signifie que le graphe Γ coupe la parabole en $(t_1, x(t_1))$ et que $(t, x(t)) \in U^+$ pour $t \in]t_1, b[$ ce qui en contradiction avec la question 4).

b) Supposons que $b < +\infty$. Alors, par le théorème des bouts on a $\lim_{t \to b^-} x(t) = \pm\infty$ ce qui signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que $(t, x(t)) \in U^+$ quand $t \in]b - \delta, b[$. Or ceci contredit la remarque a). Donc $b = +\infty$.

Supposons que $a > -\infty$. Alors, par le théorème des bouts $\lim_{t\to a^+} x(t) = +\infty$ (si $\lim_{t\to a^+} x(t) = -\infty$, le graphe Γ coupe la droite $x = 0$ ce qui est impossible par l'unicité de la solution du problème de Cauchy et la question 2)). Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]a, a+\varepsilon]$ on a $(t, x(t)) \in U^+$. Alors pour tout $t \in]a, a+\varepsilon]$ on a $x'(t) = x(t)^2(x(t)^2 - t) > 0$ ce qui signifie que $x(t)$ est croissante sur l'intervalle $]a, a+\varepsilon]$. Ceci contredit le fait que $\lim_{t\to a^+} x(t) = +\infty$. Donc $a = -\infty$.

6) Déterminer $\lim_{t\to-\infty} x(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.

Solution. Si $t \leqslant 0$, $(t, x(t)) \in U^+$ d'où $x'(t) = f(t, x(t)) > 0$. Donc $x(t)$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$. De plus, $x(t) > 0$ parce que, sinon, il existe ξ tel que $x(\xi) = 0$ ce qui contredit l'unicité de la solution du problème de Cauchy et la question 2). Donc $x(t)$ admet une limite quand $t \to -\infty$ et on pose $A = \lim_{t\to-\infty} x(t) \geqslant 0$. On va montrer que $A = 0$. Supposons que $A > 0$. Alors

$$x'(t) = x(t)^4 - tx(t)^2 \to +\infty, \qquad \text{quand } t \to -\infty.$$

En particulier, il existe $T_1 \leqslant 0$ tel que $x'(t) \geqslant 1$ pour tout $t \leqslant T_1$. Donc, pour tout $t \leqslant T_1$ on a

$$x(T_1) - x(t) = \int_t^{T_1} x'(t)dt \geqslant (T_1 - t).$$

On en déduit que $x(t) \to -\infty$ quand $t \to -\infty$ ce qui est impossible. Donc $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$.

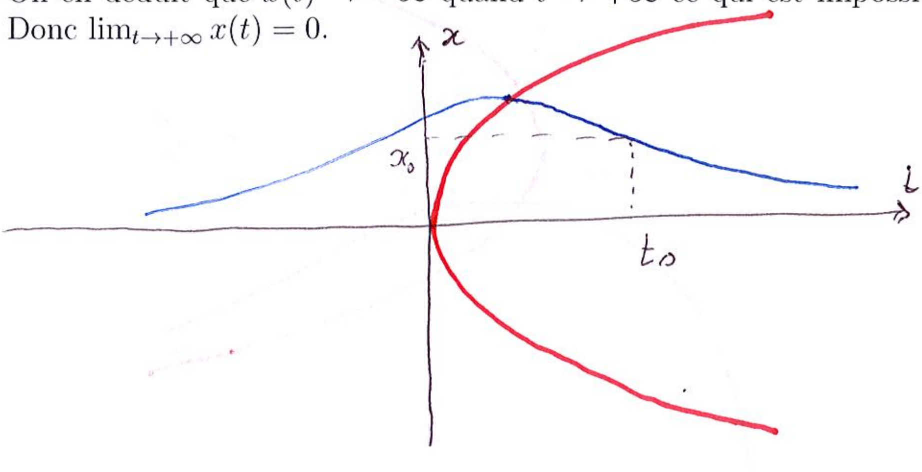
Par la question 5), $(t, x(t)) \in U^-$ pour tout $t \geqslant t_0$ ce qui signifie que $x'(t) = f(t, x(t)) < 0$ pour tout $t \geqslant t_0$ et que $x(t)$ est strictement décroissante sur $[t_0, +\infty[$. De plus, $x(t) > 0$ pour tout $t \geqslant t_0$ parce que, sinon, il existe ξ tel que $x(\xi) = 0$ ce qui contredit le théorème de Cauchy-Lipschitz et la question 2). Donc $x(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$ et on pose $B = \lim_{t\to+\infty} x(t) \geqslant 0$. On va montrer que $B = 0$. Supposons que $B > 0$. Alors

$$x'(t) = x(t)^4 - tx(t)^2 \to -\infty \qquad \text{quand } t \to +\infty.$$

En particulier, il existe $T_2 \geqslant t_0$ tel que $x'(t) \leqslant -1$ pour tout $t \geqslant T_2$. Donc, pour tout $t \geqslant T_2$ on a

$$x(t) - x(T_2) = \int_t^{T_2} x'(t)dt \leqslant T_2 - t$$

On en déduit que $x(t) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$ ce qui est impossible. Donc $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.



Dans les questions 7) et 8) on suppose que $t_0 > 0$, $x_0 < 0$ et $x_0^2 \leqslant t_0$.

7) Montrer que $b = +\infty$ et déterminer $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.

Solution. Par la question 5), $(t, x(t)) \in U^-$ pour tout $t \geqslant t_0$. Supposons que $b < +\infty$. Alors la remarque précédente implique que $x(t)$ reste bornée quand $t \to b^-$ ce qui contredit le théorème des bouts. Donc $b = +\infty$.

Comme $(t, x(t)) \in U^-$ pour tout $t \geqslant t_0$, on a que $x'(t) = f(t, x(t)) < 0$ pour tout $t \geqslant t_0$ et $x(t)$ est strictement décroissante sur $[t_0, +\infty[$. On pose $C = \lim_{t\to+\infty} x(t) < 0$. On va montrer par l'absurde que $C = -\infty$. Supposons que $C \in \mathbf{R}$. Alors

$$x'(t) = x(t)^4 - tx(t)^2 \to -\infty \qquad \text{quand } t \to +\infty.$$

Donc il existe T tel que pour tout $t \geqslant T$ on a $x'(t) \leqslant -1$ et donc

$$x(t) = \int_T^t x'(t)dt \leqslant x(T) + T - t.$$

Comme la droite d'équation $x = x(T) + T - t$ coupe la parabole $x = -\sqrt{t}$ (on peut remarquer que $x = x(T) + T - t + \sqrt{t} \to -\infty$ quand $t \to +\infty$), on en déduit que le graphe de $x(t)$ sort de U^- ce qui est impossible. Donc $C = -\infty$.

8) Montrer que si $a < 0$ alors pour tous $a < t_1 \leqslant t_2 \leqslant 0$ on a

$$\frac{1}{x(t_1)^3} - \frac{1}{x(t_2)^3} \geqslant 3(t_2 - t_1).$$

En déduire que $a > -\infty$.

Solution. Pour tout $t \leqslant 0$ on a $x'(t)/x(t)^4 = 1 - t/x(t)^2 \geqslant 1$, d'où

$$\frac{1}{x(t_1)^3} - \frac{1}{x(t_2)^3} = 3\int_{t_1}^{t_2} \frac{x'(t)}{x(t)^4}dt \geqslant 3\int_{t_1}^{t_2} dt = 3(t_2 - t_1).$$

Supposons que $a = -\infty$. Alors l'inégalité précédente montre que $1/x(t_1) \to +\infty$ quand $t_1 \to -\infty$ ce qui implique que $x(t_1) > 0$ et $x(t_1) \to 0$ quand $t_1 \to -\infty$. Or la fonction $x(t)$ est croissante et négative sur $]-\infty, 0]$.