UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Équations différentielles et calcul différentiel

Corrigé du DS du 9 novembre 2018

Durée 1h30. Aucun document autorisé.

TOUTES LES REPONSES DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Solution. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -3 \\ 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. On a

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si $v = \binom{x}{y}$ est un vecteur propre associé à λ_1, alors

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où $2x + y = 0$. Donc le sous-espace propre correspondant est le sous-espace de dimension 1 engendré par le vecteur $e_1 = \binom{1}{-2}$.

On a

$$A - \lambda_2 I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Si $v = \binom{x}{y}$ est un vecteur propre associé à λ_2, alors

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où $x + y = 0$. Donc le sous-espace propre correspondant est le sous-espace de dimension 1 engendré par le vecteur $e_2 = \binom{1}{-1}$.

2) Calculer e^{At} et e^{-At}, où t est une variable.

Solution. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, les vecteurs e_1 et e_2 forment une base de $\mathbf{R}^2$. On a $Ae_1 = -e_1$ et $Ae_2 = 2e_2$. Donc

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On note que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\exp\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t\right) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\exp(At) = P \exp\left(\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} t\right) P^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-t} + 2e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{2t} & 2e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(-At) = P \exp\left(\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} t\right) P^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{t} + 2e^{-2t} & -e^{t} + e^{-2t} \\ 2e^{t} - 2e^{-2t} & 2e^{t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

On considère le système d'équations différentielles suivant

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = -6x(t) - 4y(t). \end{cases}$$

3) Expliciter la solution générale du système (*).

Solution. On a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(At) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

d'où

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(-e^{-t} + 2e^{2t}) + C_2(-e^{-t} + e^{2t}), \\ y(t) &= C_1(2e^{-t} - 2e^{2t}) + C_2(2e^{-t} - e^{2t}), \end{aligned}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. En posant $A_1 = -C_1 - C_2$ et $A_2 = 2C_1 + C_2$ on peut écrire la solution générale sous la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{-t} + A_2 e^{2t}, \\ y(t) &= -2A_1 e^{-t} - A_2 e^{2t}, \qquad A_1, A_2 \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

4a) Trouver les solutions $(x(t), y(t))$ du système (*) vérifiant

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

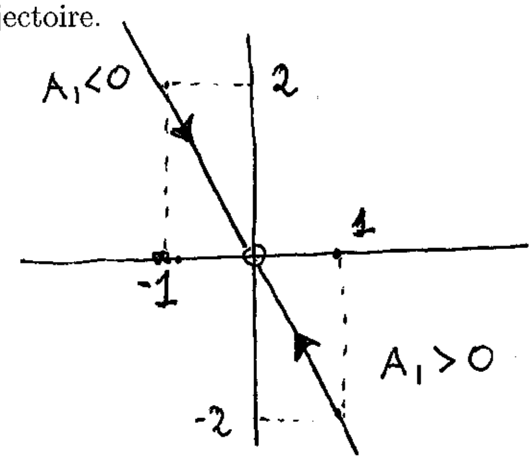
Solution. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{2t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, on trouve que $A_2 = 0$. Donc $x(t) = A_1 e^{-t}$, $y(t) = -2A_1 e^{-t}$ ou $\binom{x(t)}{y(t)} = A_1 e^{-t}\binom{1}{-2}$.

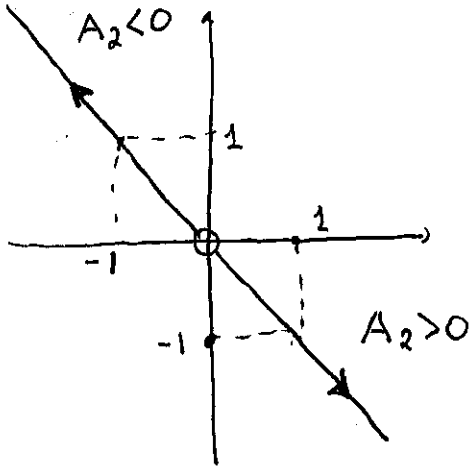
4b) Trouver les solutions $(x(t), y(t))$ du système (*) vérifiant

$$\lim_{t\to-\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

Solution. Comme $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{2t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t} = +\infty$, on trouve que $A_1 = 0$. Donc $x(t) = A_2 e^{2t}$, $y(t) = -A_2 e^{2t}$ ou $\binom{x(t)}{y(t)} = A_2 e^{2t}\binom{1}{-1}$.

4c) Dans chacun des deux cas précédents 4a) et 4b), tracer la trajectoire.





5) Soit $(x(t), y(t))$ une solution du système (*) qui n'est pas du type 4a) ou 4b). Montrer que la trajectoire de $(x(t), y(t))$ admet deux asymptotes (lorsque $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$ respectivement) dont on déterminera les équations.

Solution. Si $A_1, A_2 \neq 0$, on a

$$y(t) = -x(t) - A_1 e^{-t},$$

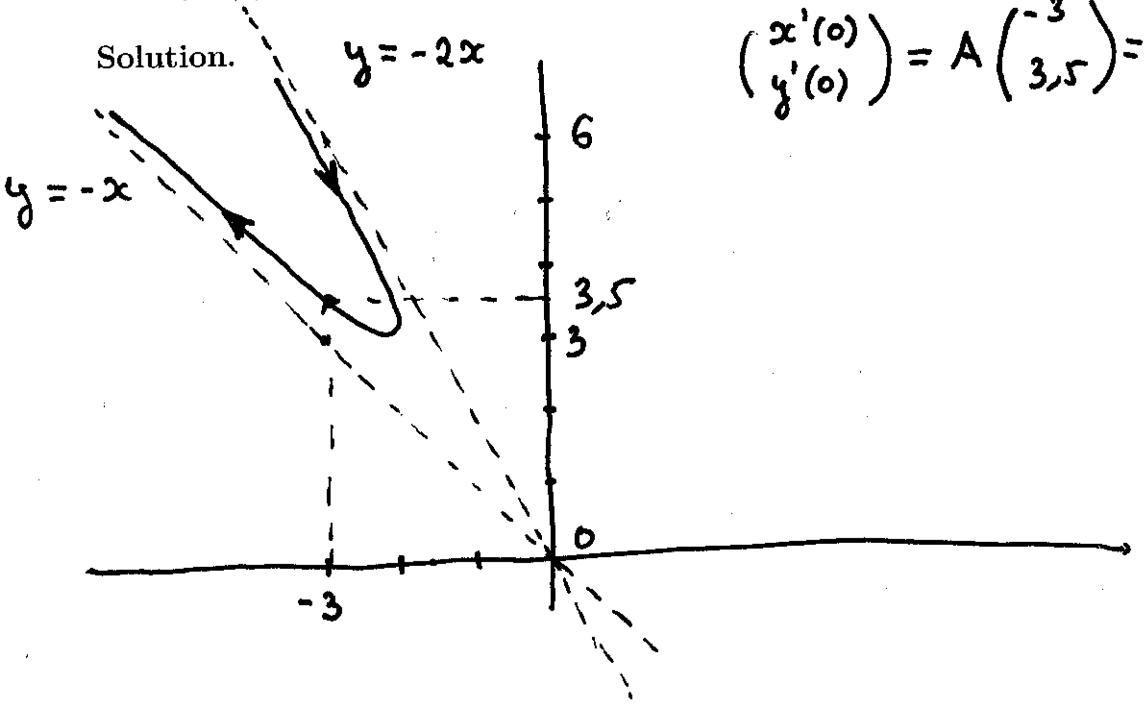
où $|x(t)| \to +\infty$, $|y(t)| \to +\infty$, et $|A_1 e^{-t}| \to 0$ quand $t \to +\infty$. Donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote de la trajectoire de $(x(t), y(t))$ lorsque $t \to +\infty$.

De même
$$y(t) = -2x(t) + A_2 e^{2t},$$
où $|x(t)| \to +\infty$, $|y(t)| \to +\infty$, et $|A_2 e^{2t}| \to 0$ quand $t \to -\infty$. Donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote de la trajectoire de $(x(t), y(t))$ lorsque $t \to -\infty$.

6) Donner l'allure de la trajectoire de la solution du problème de Cauchy $x(0) = -3$, $y(0) = 3,5$.

Solution.

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -3 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 4 \end{pmatrix}$$



7) On considère le système d'équations différentielles
$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 3y(t) + 1, \\ y'(t) = -6x(t) - 4y(t) - 1. \end{cases}$$

Donner la solution du problème de Cauchy $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ pour ce système.

Solution. On a
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(At) \int_0^t \exp(-A\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} d\tau.$$

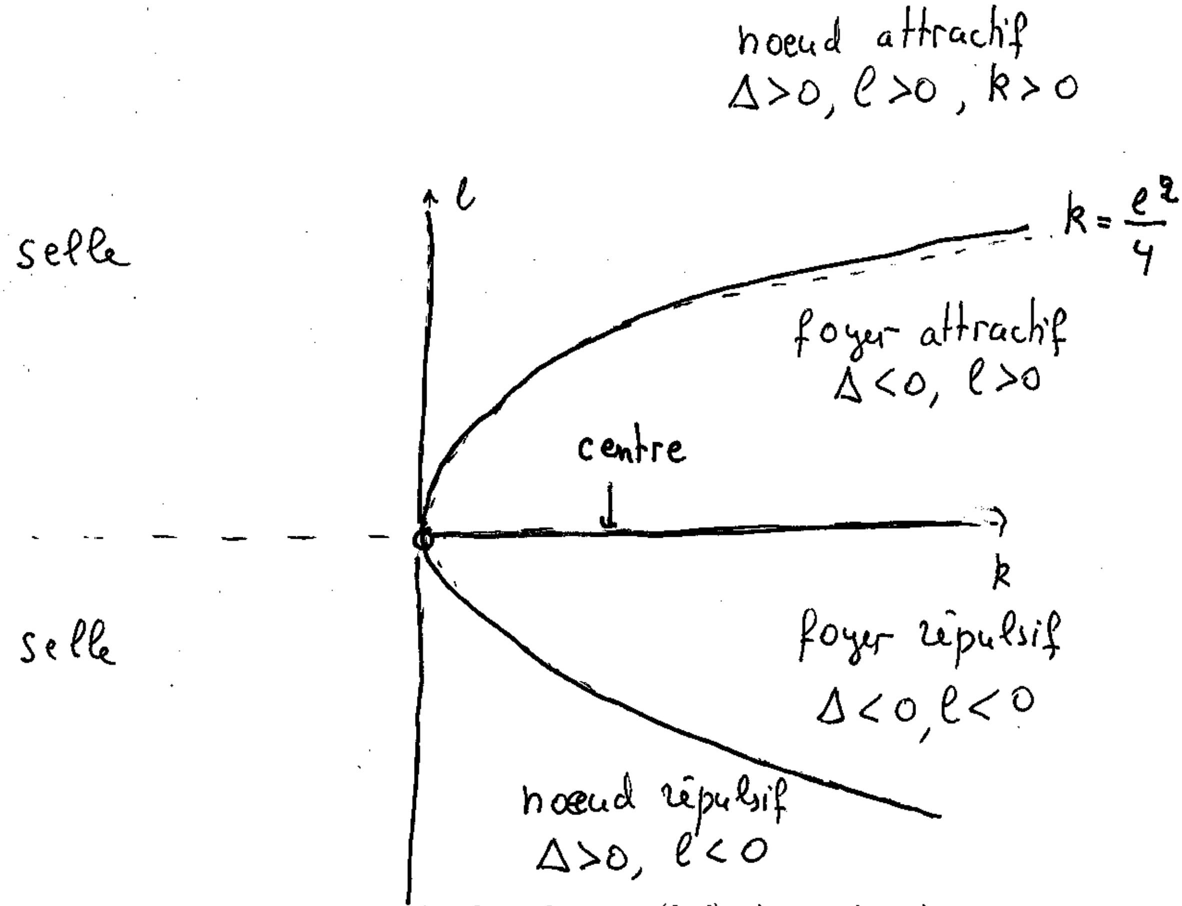
Comme
$$\exp(-A\tau)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{pmatrix},$$
on trouve que
$$\int_0^t \exp(-A\tau)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}d\tau = \frac{1}{2}(e^{-2t}-1)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$
et
$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(e^{-2t}-1)\begin{pmatrix}-e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{2t}-1\\-(e^{2t}-1)\end{pmatrix}.$$
Donc $x(t) = \frac{1}{2}(e^{2t}-1)$ et $y(t) = -\frac{1}{2}(e^{2t}-1)$

Exercice 2. On considère le système d'équations différentielles d'ordre 2:
$$(**) \qquad \begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -kx(t) - \ell y(t). \end{cases}$$
où k et $\ell \in \mathbf{R}$ sont des paramètres fixés.

1) Représenter dans le plan $Ok\ell$ l'ensemble des points (k,ℓ) pour lesquels le portrait de phase du système (**) est
1a) un foyer attractif (resp. répulsif);
1b) un nœud attractif (résp. répulsif);
1c) une selle.
Rappeler l'allure des portraits de phases des 3 cas listés.

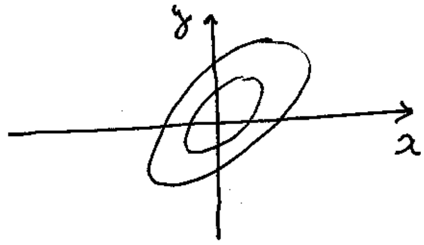
Solution. La matrice du système est
$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\-k & -\ell\end{pmatrix}$$
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = X^2 + \ell X + k$. Le discriminant de A est $\Delta = \ell^2 - 4k$ et la trace de A est $\mathrm{Tr}(A) = -\ell$. Donc le portrait de phase du système (**) est

- un foyer attractif, si $\Delta = \ell^2 - 4k < 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = -\ell < 0$.
- un foyer répulsif, si $\Delta = \ell^2 - 4k < 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = -\ell > 0$.
- un nœud attractif, si $\Delta = \ell^2 - 4k > 0$, $\det(A) = k > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = -\ell < 0$.
- un nœud répulsif, si $\Delta = \ell^2 - 4k > 0$, $\det(A) = k > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = -\ell > 0$.
- une selle, si $\Delta = \ell^2 - 4k > 0$ et $\det(A) = k < 0$

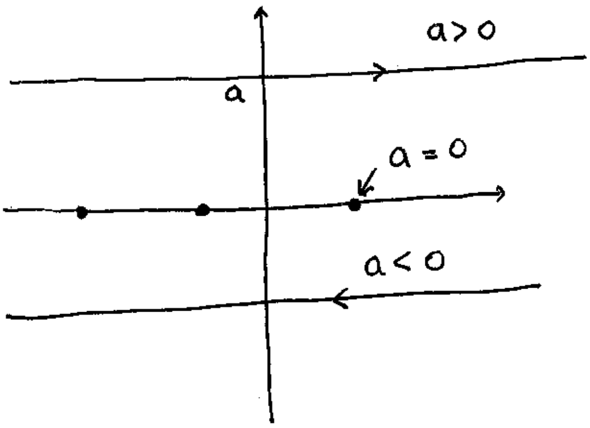


2) Donner l'allure du portrait de phase lorsque (k, ℓ) n'appartient à aucun des ensembles précédents.

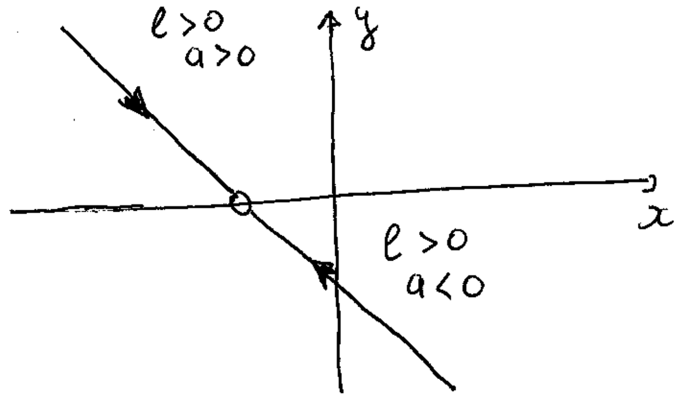
Solution. • Supposons que $l = 0$ et $k > 0$. Alors $\Delta = \ell^2 - 4k < 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = -\ell = 0$ et il s'agit d'un centre.



• Supposons que $k = l = 0$. Alors $x'(t) = y(t)$ et $y(t) = 0$. Donc les solutions du système sont $y(t) = a$ et $x(t) = at + b$, où $a, b \in \mathbf{R}$. Les trajectoires sont les droites parallèles à l'axe des abscisses:



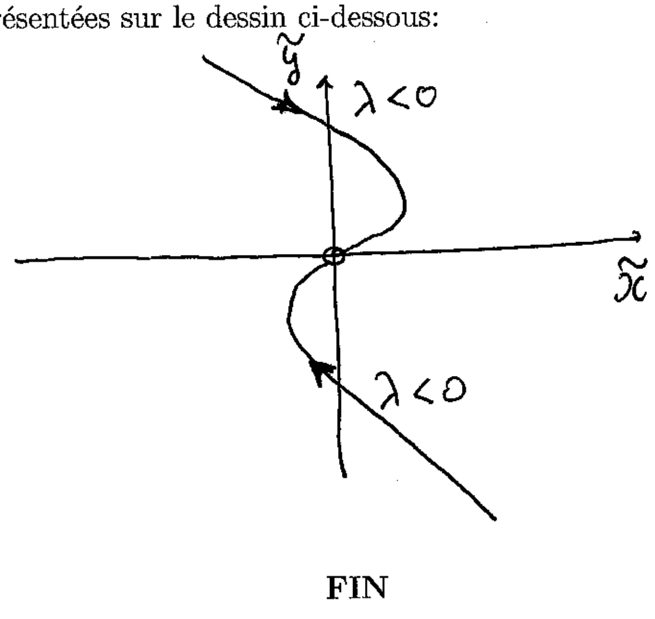
• Supposons que $k = 0$ et $l \neq 0$. Alors $x'(t) = y(t)$ et $y'(t) = -\ell y(t)$. Les solutions du système sont $y(t) = ae^{-\ell t}$, $x(t) = -\frac{a}{\ell}e^{-\ell t} + b$ où $a, b \in \mathbf{R}$. Si $a = 0$, la trajectoire se réduit au point $(b, 0)$. Si $a \neq 0$, alors on a $y(t) = -\ell x(t) + b\ell$, où $y(t)$ parcourt soit l'intervalle $]-\infty, 0[$ (si $a < 0$) soit l'intervalle $]0, +\infty[$ (si $a > 0$). Les trajectoires sont des demi-droites comme le montre le dessin ci-dessous:



• Supposons que $\Delta = 0$ et $l \neq 0$. Alors le polynôme caractéristique a une racine double $\lambda = -\ell/2$. Après un changement de base convenable, le système s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'(t) \\ \tilde{y}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\tilde{y}(t) = ae^{\lambda t}$ et $\tilde{x}(t) = ate^{\lambda t}$, où $a \in \mathbf{R}$. Les trajectoires sont représentées sur le dessin ci-dessous:



FIN