UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Calcul différentiel

Corrigé de l'examen du 14 décembre 2018

Durée 3h. Aucun document autorisé.

Toutes les reponses doivent être justifiées.

Exercice 1. 1) Enoncer le théorème des fonctions implicites dans le cas général.

Solution. Cf. cours.

On considère la relation

$$\ln(x) + \ln(y) + x + y = 2.$$

2) Montrer que cette relation définit, au voisinage de 1, une fonction continument différentiable $\theta(x)$ telle que $\theta(1) = 1$ et $\log(x)+\log(\theta(x))+x+\theta(x) = 2$.

Solution. Soit $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y) + x + y - 2$. On a $f(1,1) = 0$. Comme

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x} + 1,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y} + 1,$$

la fonction $f(x,y) = \ln(x)+\ln(y)+x+y-2$ admet des dérivées continues par rapport à x et y sur l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. On en déduit qu'elle est continument différentiable sur ce domaine. On a Comme

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2 \neq 0,$$

le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe une fonction continument dérivable $\theta(x)$, définie sur un voisinage de 1 et telle que $\theta(1) = 1$ et $f(x, \theta(x)) = 0$.

3) Montrer que $\theta(x)$ est deux fois dérivable en 1 et calculer $\theta'(1)$ et $\theta''(1)$.

Solution. On a $f(x, \theta(x))' = 0$, d'où

$$\frac{1}{x} + \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} + 1 + \theta'(x) = 0.$$

Donc,

$$\theta'(x) = -\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{\theta(x)}}.$$

En posant $x = 1$, on obtient que $\theta'(1) = -1$.

Comme $\theta(x)$ est continument dérivable, le second membre de cette formule est continument dérivable. Donc $\theta'(x)$ est continument dérivable et on a

$$\theta''(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{\theta(x)})} - \frac{(1+\frac{1}{x})\frac{\theta'(x)}{\theta(x)^2}}{(1+\frac{1}{\theta(x)})^2}.$$

En posant $x = 1$, on obtient que

$$\theta''(1) = \frac{1}{2} - \frac{-2}{4} = 1.$$

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

1) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ il existe des voisinages ouverts $U_{(a,b)}$ et $V_{f(a,b)}$ de (a,b) et $f(a,b)$ respectivement tels que f est un C^1-difféomorphisme de $U_{(a,b)}$ sur $V_{f(a,b)}$.

Solution. Comme $e^x \cos(y)$ et $e^x \sin(y)$ admettent des dérivées partielles continues, l'application $f(x,y)$ est continument différentiable sur $\mathbf{R}^2$. On a

$$Jac(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\det Jac(f)_{(a,b)} = (e^a \cos(b))^2 + (e^a \sin(b))^2 = \\ e^{2a}((\cos(b))^2 + (\sin(b))^2) = e^{2a}.$$

Comme $e^{2a} \neq 0$ pour tout $a \in \mathbf{R}$, on en déduit que $Jac(f)_{(a,b)}$ est inversible en tout point $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Donc $D(f)_{(a,b)}$ est inversible en tout point $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Par le théorème d'inversion locale, pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ il existe des voisinages ouverts $U_{(a,b)}$ et $V_{f(a,b)}$ de (a,b) et $f(a,b)$ respectivement tels que f est un C^1-difféomorphisme de $U_{(a,b)}$ sur $V_{f(a,b)}$.

2) L'application f, est-elle un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur son image $f(\mathbf{R}^2)$?

Solution. On a

$$f(x,y) = f(x, y + 2\pi)$$

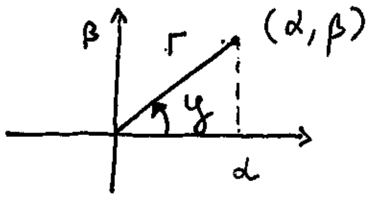
pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Donc, l'application f n'est pas injective. On en déduit que f n'est pas un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $f(\mathbf{R}^2)$.

3) Soit $U = \mathbf{R}\times]0, 2\pi[$. Déterminer $f(U)$ et montrer que f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Solution. Tout point $(\alpha, \beta) \neq (0,0) \in \mathbf{R}^2$ s'écrit de façon unique dans les coordonnées polaires sous la forme

$$(\alpha, \beta) = (r\cos(y), r\sin(y)), \qquad r > 0, y \in [0, 2\pi[,$$

où $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et y est la mesure de l'angle entre entre le point (α, β) et l'axe des abscisses.



Soit $V = \mathbf{R}^2 \setminus \{(\alpha, 0) | \alpha > 0\}$. Alors,

a) pour tout $(x,y) \in U$ on a $e^x > 0$, d'où

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) \in V;$$

b) pour tout $(\alpha, \beta) \in V$ il existe un unique couple (r, y), tel que $r > 0$, $y \in]0, 2\pi[$ et

$$(\alpha, \beta) = (r\cos(y), r\sin(y)).$$

Comme la fonction $x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+ = \{r \in \mathbf{R} | r > 0\}$, il existe un unique $x = \ln(r) \in \mathbf{R}$ tel que $e^x = r$. Donc, pour tout $(\alpha, \beta) \in V$ il existe un unique couple $(x, y) \in U$ tel que

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) = (r\cos(y), r\sin(y)) = (\alpha, \beta).$$

On en déduit que f établit une bijection entre U et V. Comme f est un C^1-difféomorphisme local au voisinage de tout point de U, on obtient que f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U) = V$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$(*) \qquad x'(t) = 1 - x(t)^3 + t^3.$$

1) Montrer que pour tous $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ il existe une unique solution maximale $x(t)$ de l'équation (*) vérifiant $x(t_0) = x_0$.

Solution. Soit $f(t,x) = 1 - x^3 + t^3$. Alors l'équation $(*)$ s'écrit $x'(t) = f(t, x(t))$. La fonction $f(t,x)$ est continument différentiable par rapport à x (on a $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2$). Donc, elle est localement lipschitzienne par rapport à x, et par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tous $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ il existe une unique solution maximale $x(t)$ vérifiant $x(t_0) = x_0$.

2) Est-ce que vous pouvez déviner la solution maximale de l'équation (*) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$?

Solution. $x(t) = t$.

3) Soit $f(t,x) = 1 - x^3 + t^3$. Représenter graphiquement les ensembles $C = \{(t,x) \mid f(t,x) = 0\}$, $U^+ = \{(t,x) \mid f(t,x) > 0\}$ et $U^- = \{(t,x) \mid f(t,x) < 0\}$ dans le plan Otx.

Solution. L'ensemble C est le graphe de la fonction $u(t) = \sqrt[3]{1+t^3}$. Comme

$$u'(t) = \frac{t^2}{(1+t^3)^{2/3}} > 0,$$

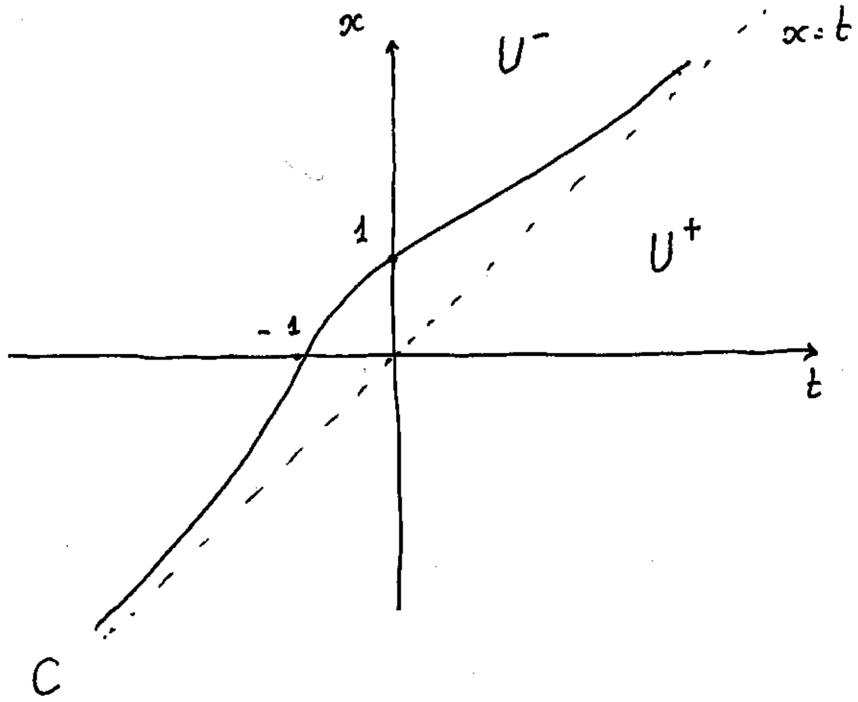
elle est srictement croissante. On a

$$\lim_{t\to\infty} u(t)/t = \lim_{t\to\infty} \sqrt[3]{1 + 1/t^3} = 1$$

et

$$\lim_{t\to\infty}(u(t) - t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt[3]{1+t^3} - t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1+t^3)^{2/3} + (1+t^3)^{1/3}t + t^2} = 0.$$

Donc, la droite $x = t$ est une asymptote oblique à C.

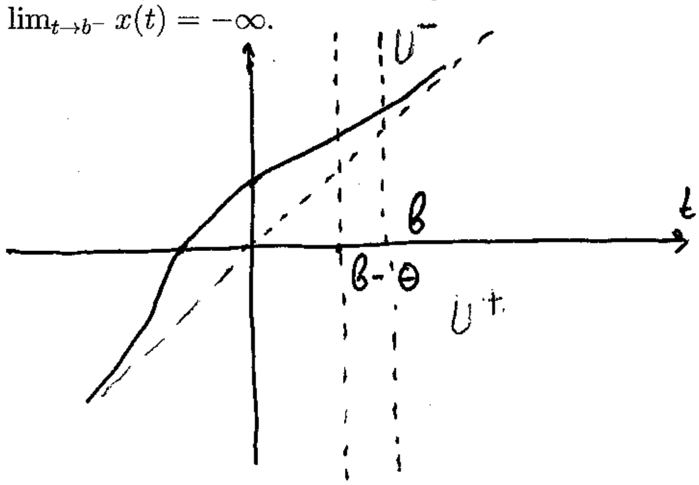


Dans le reste de cet exercice on fixe t_0 et x_0 et on note $x(t)$ la solution maximale du problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$.

4) Montrer que $b = +\infty$.

Solution. Supposons que $b \leqslant +\infty$. Alors, par le théorème des bouts on a $\lim_{t\to b^-} x(t) = +\infty$ ou $\lim_{t\to b^-} x(t) = -\infty$. Supposons d'abord que $\lim_{t\to b^-} x(t) = +\infty$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [b-\delta, b[$ on a $(t, x(t)) \in U^-$. Or, comme $x'(t) = f(t, x(t)) < 0$, la solution $x(t)$ est décroissante sur $[b-\delta, b[$, ce qui contredit l'hypothèse $\lim_{t\to b^-} x(t) = +\infty$.

Supposons maintenant que $\lim_{t\to b^-} x(t) = -\infty$. Alors il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $t \in [b-\theta, b[$ on a $(t, x(t)) \in U^+$. Or, comme $x'(t) = f(t, x(t)) > 0$, la solution $x(t)$ est croissante sur $[b-\theta, b[$, ce qui contredit l'hypothèse $\lim_{t\to b^-} x(t) = -\infty$.



Supposons maintenant que $(t_0, x_0) \in U^-$.

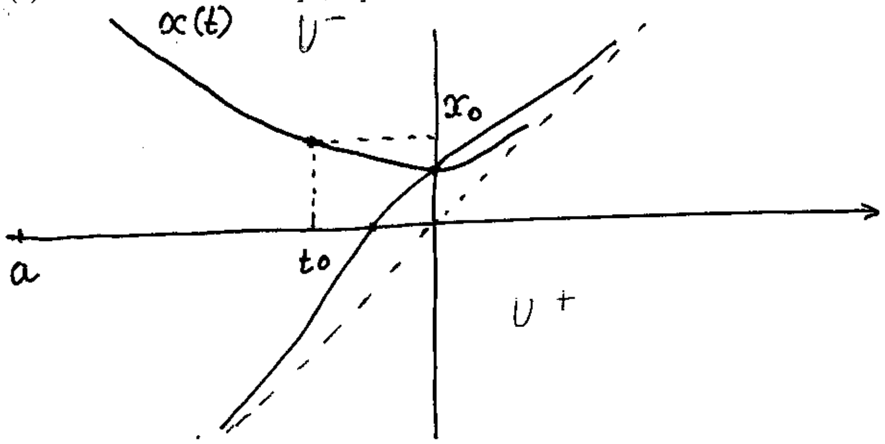
5) Montrer que $x(t)$ est décroissante sur $]a, t_0[$ et que $x'(t)$ est croissante et négative sur $]a, t_0[$.

Solution. Supposons que $x(t)$ n'est pas décroissante sur $]a, t_0[$. Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]a, t_0[$ tel que $x'(c) = 0$. Posons $\theta = \sup\{t \in]a, t_0[| x'(t) = 0\}$. Alors, par continuité de $x'(t)$ on a $x'(\theta) = 0$. De plus, $x'(t) < 0$ pour tout $t \in]\theta, t_0]$. On a

$$x(\theta) = x(t_0) - \int_\theta^{t_0} x'(t)dt > x(t_0).$$

Comme C est le graphe d'une fonction croissante, on en déduit que $(\theta, x(\theta)) \in U^-$. Donc, $x'(\theta) < 0$ ce qui contredit le choix de θ. On a montré que $x(t)$ est décroissante et que $x'(t)$ est négative sur $]a, t_0]$.

On a $x'(t) = t^3 - x(t)^3 + 1$. Comme $t \mapsto t^3$ est croissante et $t \mapsto x(t)$ est décroissante, la fonction $t^3 - x(t)^3 + 1$ est croissante sur $]a, t_0]$. Donc, $x'(t)$ est croissante sur $]a, t_0]$.



6) On veut montrer par l'absurde que $a > -\infty$. Supposons que $a = -\infty$.

6a) Montrer qu'il existe $\alpha < 0$ tel que $x(t) > 0$ et $x'(t) \leqslant -x(t)^3$ pour tout $t < \alpha$.

Solution. Pour tout $t \in]-\infty, t_0[$ on a

$$x(t) = x(t_0) - \int_t^{t_0} x'(s)ds$$

Comme $x'(s)$ est croissante, $x'(s) < x'(t_0)$ pour tout $s \in]t, t_0[$, d'où $-x'(s) > -x'(t_0)$ pour tout $s \in]t, t_0[$. Posons $k = -x'(t_0) > 0$. Alors,

$$x(t) > x(t_0) + \int_t^{t_0} kds = x(t_0) + k(t_0 - t).$$

On en déduit que $x(t) > 0$ pour tout $t < \min\{t_0, t_0 + x(t_0)/k\}$.

Comme $x'(t) = t^3 - x(t)^3 + 1$, pour tout $t < \min -1$ on a $x'(t) < -x(t)^3$. Donc on peut prendre

$$\alpha = \min\{-1, t_0, t_0 + x(t_0)/k\}.$$

6b) Montrer que pour tout $t < \alpha$ on a

$$\frac{1}{x(t)^2} - \frac{1}{x(\alpha)^2} \leqslant 2(t - \alpha).$$

Solution. Comme $x(t) > 0$, pour tout $t < \alpha$ on a $x'(t)/x(t)^3 \leqslant -1$. Donc

$$\frac{1}{x(t)^2} - \frac{1}{x(\alpha)^2} = 2\int_t^{\alpha} \frac{x'(s)}{x^3(s)}ds \leqslant 2\int_t^{\alpha} (-1)ds = 2(t - \alpha).$$

6c) Conclure.

Solution. Supposons que $a = -\infty$. Alors
$$-\frac{1}{x(\alpha)^2} < \frac{1}{x(t)^2} - \frac{1}{x(\alpha)^2} \leqslant 2(t-\alpha) \to -\infty$$
quand $t \to -\infty$ ce qui est absurde.

FIN